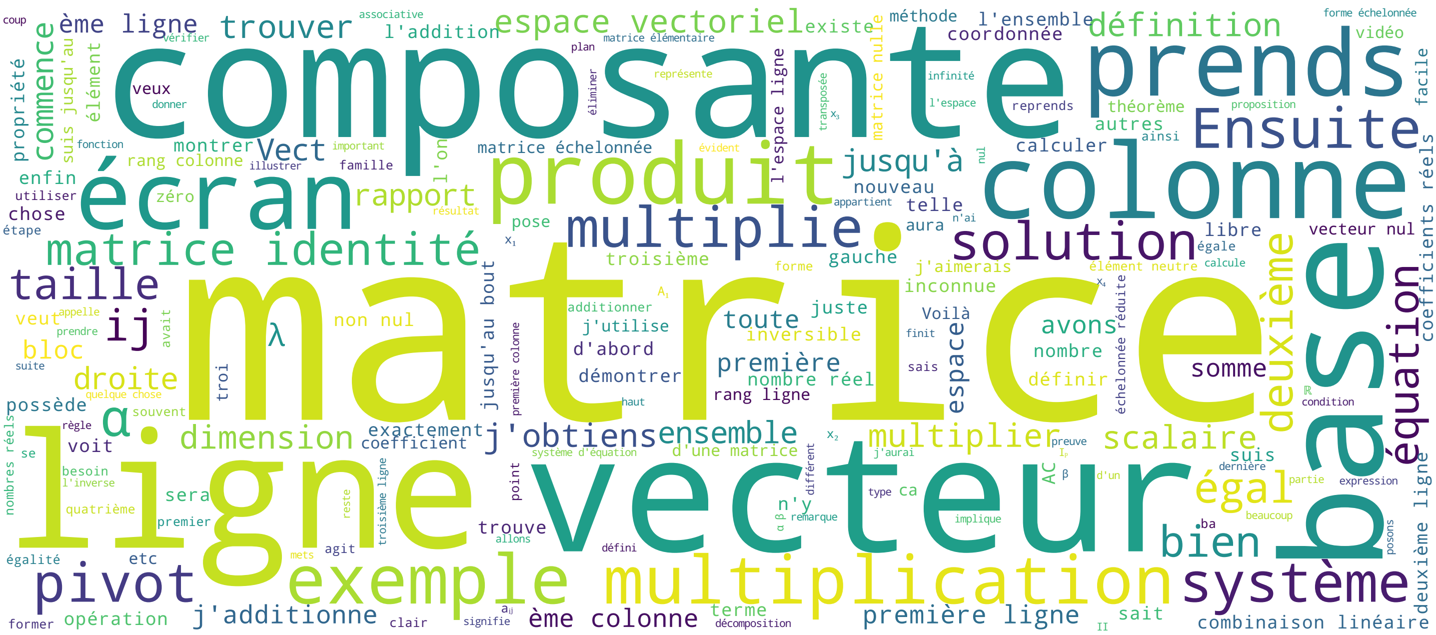
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 2 : Algèbre matricielle

2.2 La multiplication de matrices

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

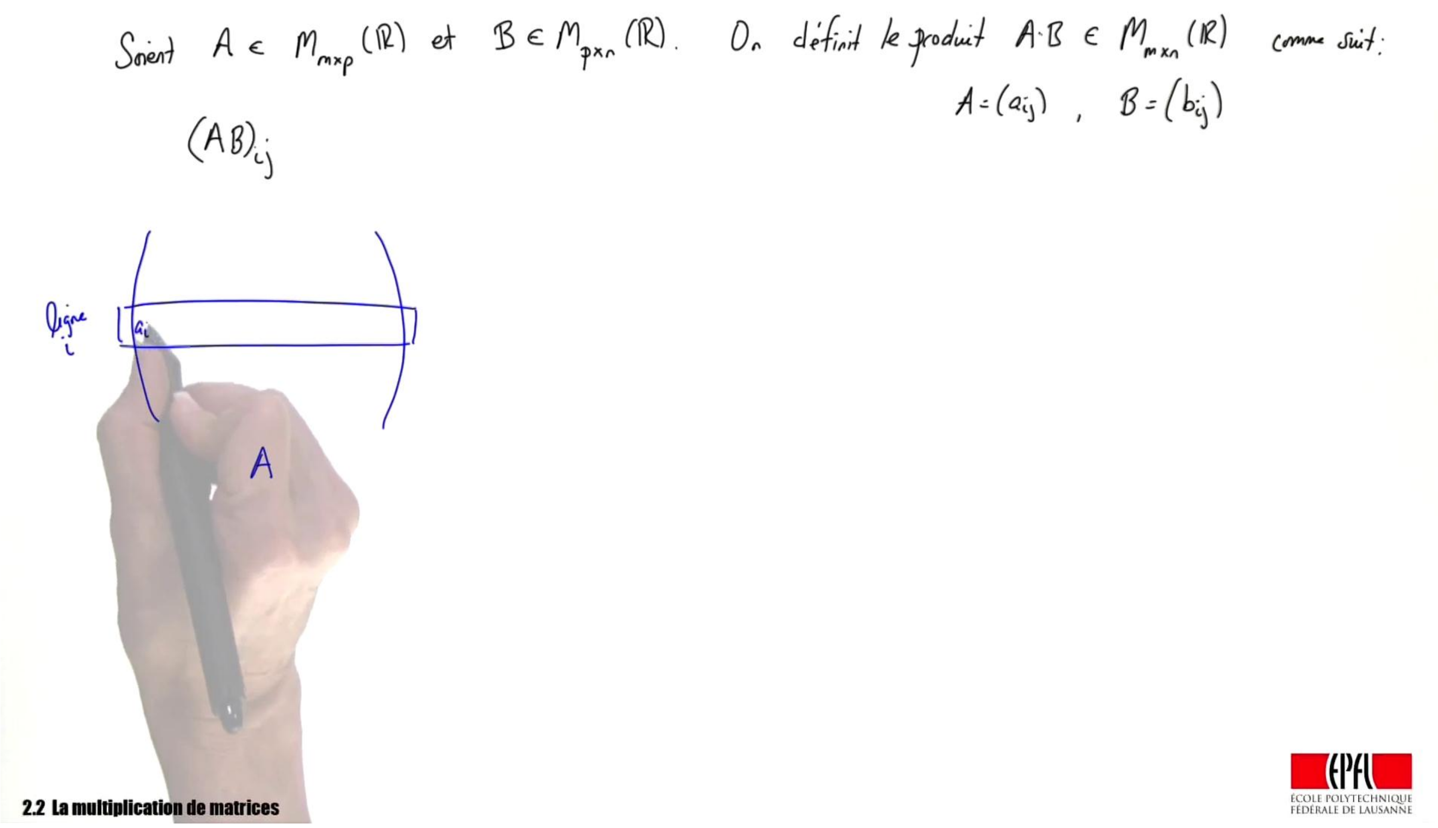
2.2 La multiplication de matrices

Dans la vidéo précédente, nous avons vu comment additionner deux matrices de même taille, multiplier une matrice par un nombre réel (ce qu'on appelle la multiplication scalaire), et faire la transposée d'une matrice. Dans cette vidéo, nous apprendrons à multiplier deux matrices. On ne va pas multiplier deux matrices qui sont de même taille, c'est déjà une complication. Cela ne sera pas évident au début mais cela deviendra plus clair plus tard dans le cours.

Notes

Summary

0m 02s

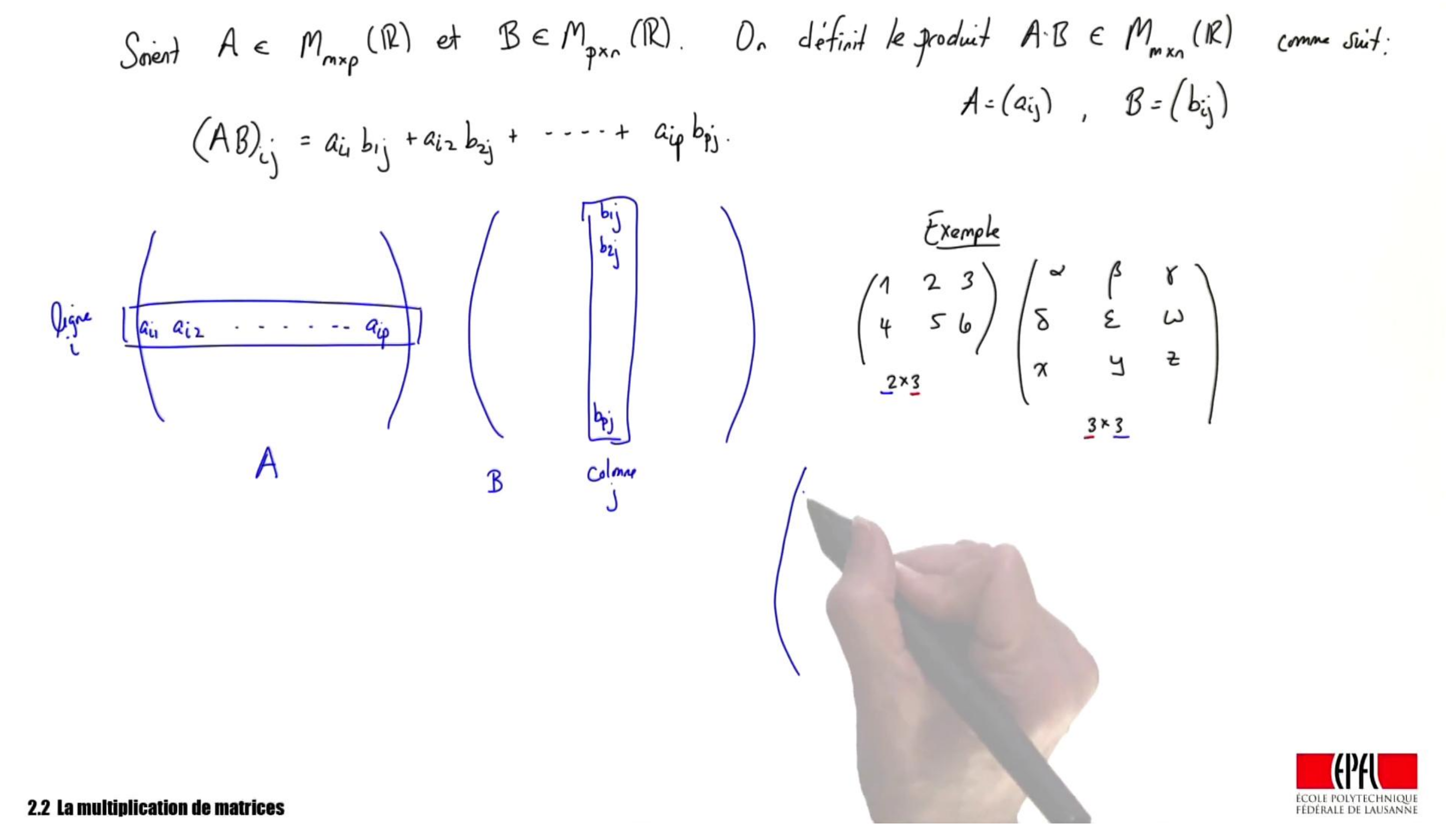


Donc je commence par vous dire quelle taille de matrice on va multiplier. Je prends une matrice *A* de taille *m x p* à coefficients réels et une matrice *B* de taille *p x n*. On définit le produit *A·B* (souvent, on n'inscrit pas le point) qui sera une matrice *m x n* à coefficients réels, comme suit. Donc déjà vous remarquez, les dimension sont ici *m x p* et ici *p x n*, et le produit est une matrice *m x n*. Pour définir le produit, comme précédemment, je dois définir la composante *ij* de la matrice, et cela sera formé des composantes des deux matrices. On note : *A* sera la matrice dont la composante *i j* est a_{ij}, la matrice *B* aura pour composante *ij*, le nombre b_{ij}, et maintenant je fais un petit dessin. Donc il faut imaginer la matrice *A* ici. Pour former la composante *ij*, je vais aller chercher la i-ème ligne de la matrice *A* c'est celle-ci [voir écran]. de la matrice *A*, donc qu'y a-t-il dans cette ligne ? Il y a : a_{i1}, a_{i2},..., a_{ip} (comme la matrice *A* possède *p* colonnes, cela finit avec *p*) Ensuite, j'ai la matrice *B*.

Notes

Summary

0m 30s



Pour la matrice *B*, je vais aller chercher la j-ème colonne, à cause de ce j-là [voir écran]. Et que vois-je dans la colonne j ? Ça commence avec b_{1j}, b_{2j},... cela finit à la ligne *p* donc avec le nombre b_{pj}. Pour former cette composante-là du produit je dois calculer les produits successifs tout le long de cette ligne et cette colonne que j'additionne. C'est ça la définition. Donc ici, j'ai a_{i1} qui multiplie b_{1j} + a_{i2} qui multiplie b_{2j} +... a_{ip} qui multiplie b_{pj}. *Voilà comment on fait pour trouver une composante du produit. Voici un exemple. Prenons une matrice 2 x 3, que l'on a beaucoup utilisée. Je peux la multiplier par n'importe quelle matrice 3 x quelque chose . Je vais la multiplier par une matrice 3 x 3. Je multiplie une matrice 2 x 3 par une 3 x 3 et le résultat sera une matrice 2 x 3. Pour trouver la composante (1,1) selon la règle précédente, je dois prendre la première ligne ici et la première colonne là, et je multiplie chaque terme successif puis j'additionne. Donc j'obtiens* $1\cdot\alpha + 2\cdot\delta + 3\cdot x$.

Notes

Summary

2m 26s

Soient $A, B \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$, $C, D \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, $E \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites.

1. $A(CE) = (AC)E$;
2. $(A+B)C = AC + BC$;
3. $A(C+D) = AC + AD$;
4. $\lambda(AC) = (\lambda A)C = A(\lambda C)$;
5. $0_{a\times m} \cdot A = 0_{a\times p}, A \cdot 0_{p\times r} = 0_{m\times r}$;
6. $(AC)^T = C^T A^T$.

2.2 La multiplication de matrices

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Pour trouver la composante (1,2) de la matrice, je prends la première ligne et la deuxième colonne, je multiplie successivement et j'additionne. Donc 1·β + 2·ε + 3·y. Et enfin pour la composante (1,3), j'utilise la 1-ère ligne et la 3-ème colonne : 1·γ + 2·ωa + 3·z. Maintenant je dois utiliser la deuxième ligne, pour la composante (2,1), j'utilise la deuxième ligne et la première colonne, je calcule le produit et j'additionne : 4·α + 5·δ + 6·x, etc. On remarque que le produit de matrices est une opération compliquée. Maintenant, comme pour l'addition, la multiplication par un scalaire et la transposée, il y a certaines propriétés qui sont beaucoup moins évidentes cette fois.

Notes

Summary

4m 07s

Soient $A, B \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$, $C, D \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, $E \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites.

1. $A(CE) = (AC)E$; mult. associative !!
2. $(A+B)C = AC + BC$;
3. $A(C+D) = AC + AD$; distributivité
4. $\lambda(AC) = (\lambda A)C = A(\lambda C)$;
5. $0_{a\times m} \cdot A = 0_{a\times p}, A \cdot 0_{p\times r} = 0_{m\times r}$;
6. $(AC)^T = C^T A^T$. non evidente!

Donc, je définis ces propriétés. Je me donne deux matrices m x p, deux matrices p x q, une troisième matrice q x n et un scalaire. La première propriété dit que la multiplication des matrices est associative. Cela est assez surprenant car si on regarde la définition il n'est pas du tout évident que cette multiplication sera associative. Je vais le démontrer tout à l'heure. Ici, nous avons deux règles de distributivité, ces règles sont plus faciles à illustrer. Ici, nous avons une sorte d'associativité par rapport à la multiplication scalaire, car on peut faire le produit multiplié par le scalaire ou bien multiplier l'une des deux matrices par le scalaire et ensuite faire la multiplication. La cinquième propriété est évidente : si on multiplie par la matrice nulle de taille appropriée, on retrouve la matrice nulle parce que tous les produits sont nuls. La sixième propriété n'est pas évidente non plus : c'est un bon exercice d'essayer de faire cela à la maison. D'ailleurs je l'intégrerai peut-être dans une future série d'exercices. Avant de vous démontrer la propriété numéro un, j'aimerais rajouter deux propriétés. Ces propriétés concernent une matrice spéciale qu'on nomme la matrice identité.

Notes

Summary

5m 07s

Soient $A, B \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$, $C, D \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, $E \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites.

1. $A(CE) = (AC)E$; mult. associative !!
2. $(A+B)C = AC + BC$; } distributivité
3. $A(C+D) = AC + AD$; }
4. $\lambda(AC) = (\lambda A)C = A(\lambda C)$;
5. $0_{a\times m} \cdot A = 0_{a\times p}, A \cdot 0_{p\times r} = 0_{m\times r}$;
6. $(AC)^T = C^T A^T$. non evidente!

Posons I_p la matrice p×p telle que $(I_p)_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $(I_p)_{ii} = 1$.
On l'appelle la matrice identité (de taille p×p).

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

2.2 La multiplication de matrices

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Comme avec la multiplication il y avait la matrice nulle, qui agit comme un élément neutre par rapport à l'addition. On se demande s'il n'y a pas une matrice qui agit comme un élément neutre par rapport à la multiplication, et la réponse est oui, cela existe. Donc posons : I_p, la matrice p x p, telle que si je regarde une composante ij de la matrice où iest différent de j, je trouve 0. Et si je regarde la composante ii de la matrice (donc mêmes indices de ligne et de colonne), je trouve 1. On l'appelle la matrice identité (vous verrez pourquoi) de taille p x p, souvent on dit simplement la matrice identité et souvent on laisse tomber le p qui est là aussi parce qu'on sait que le I, c'est la matrice identité de la taille qu'il faut dans le contexte. Voici un dessin de cette matrice I_p. À la composante (1,1) j'ai le chiffre 1. À la composante (1,2) j'ai 0. Et ainsi de suite... À la composante (2,1) j'ai 0. À la composante (2,2) j'ai 1, etc. Ici jusqu'en bas à la composante (p,p) j'ai 1 de nouveau.

Notes

Summary

6m 29s

Soient $A, B \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$, $C, D \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, $E \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites.

1. $A(CE) = (AC)E$; mult. associative !!
2. $(A+B)C = AC + BC$;
3. $A(C+D) = AC + AD$; $\Big\}$ distributivité.
4. $\lambda(AC) = (\lambda A)C = A(\lambda C)$;
5. $0_{a\times m} \cdot A = 0_{a\times p}, A \cdot 0_{p\times r} = 0_{m\times r}$;
6. $(AC)^T = C^T A^T$. non evidente!

Posons I_p la matrice $p\times p$ telle que $(I_p)_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $(I_p)_{ii} = 1$.

On l'appelle la matrice identité (de taille $p\times p$).

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(7) $A \cdot I_p = A$ et $I_p \cdot C = C$.

Attention ! La multiplication de matrices n'est pas (en général) commutative.

e.g. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq$.

2.2 La multiplication de matrices

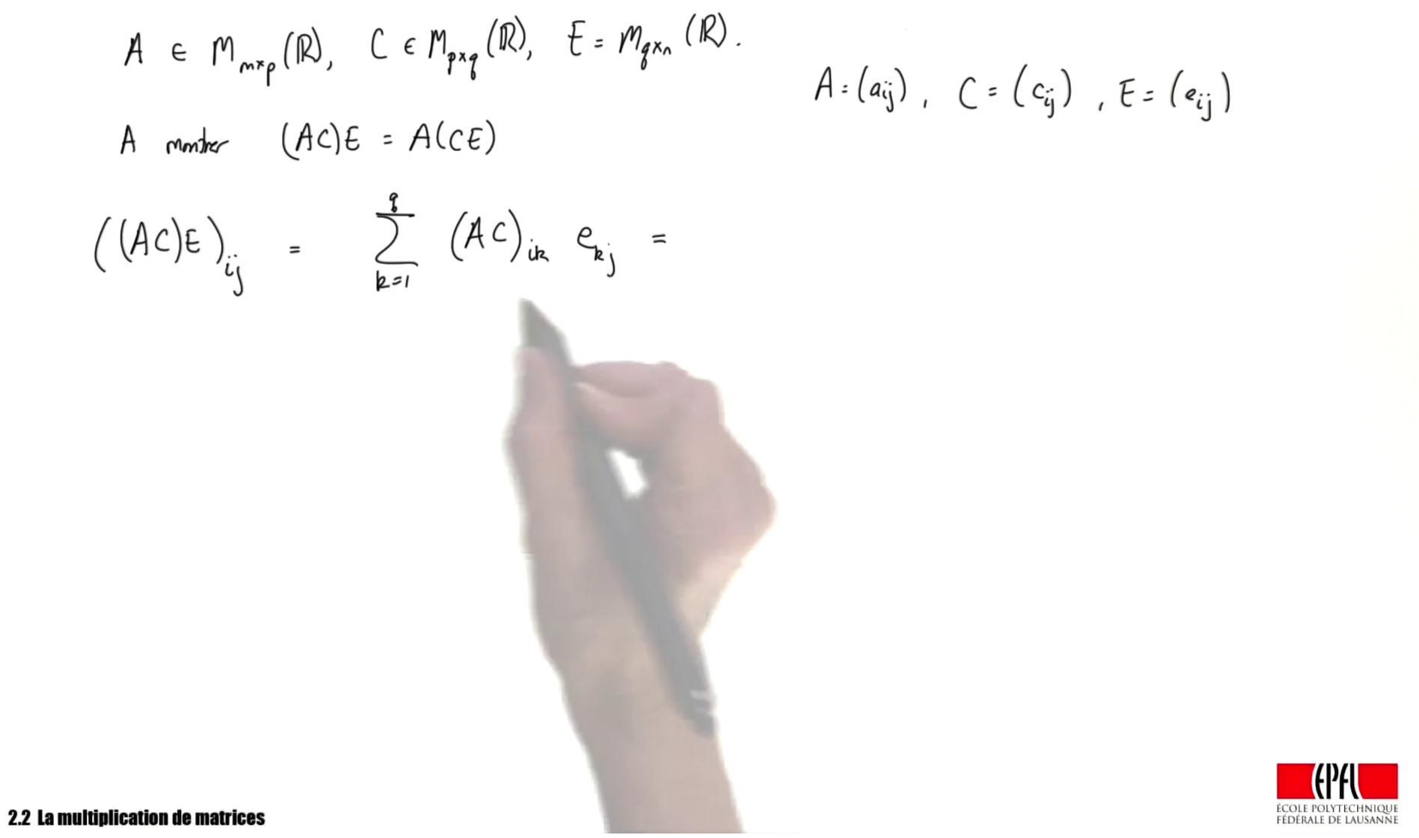
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc il y a une diagonale de 1 qui descend là et des 0 ailleurs. La septième propriété est que si j'utilise une matrice par laquelle je peux multiplier I_p donc par exemple A qui est m x p, je peux utiliser la matrice identité p x p à droite et quand je calcule ce produit-là, j'obtiens A. Pour la matrice C, qui est p x q je peux inscrire la matrice identité p x p à gauche, ce produit existe, et j'obtiens la matrice C. C'est donc la matrice qui agit comme élément neutre par rapport à la multiplication. Avant de vous illustrer l'associativité, j'aimerais attirer votre attention sur une dernière chose : je l'inscris en rouge. Attention : (et il est important de le noter) la multiplication n'est pas, en général, commutative. Il se peut que vous trouviez deux matrices A et B telles que AB = BA mais en général, on ne peut pas être sûr. Voici un exemple. Prenons cette matrice [voir écran] que je multiplie par la matrice [voir écran] Ce sont des matrices 2 x 2 et 2 x 2 donc j'obtiendrai une matrice 2 x 2. Donc j'obtiens le résultat [voir écran]. Maintenant je le fais dans l'autre sens. On voit déjà que ce n'est pas pareil. J'obtiens [voir écran]. Ce n'est pas pareil.

Notes

Summary

7m 58s

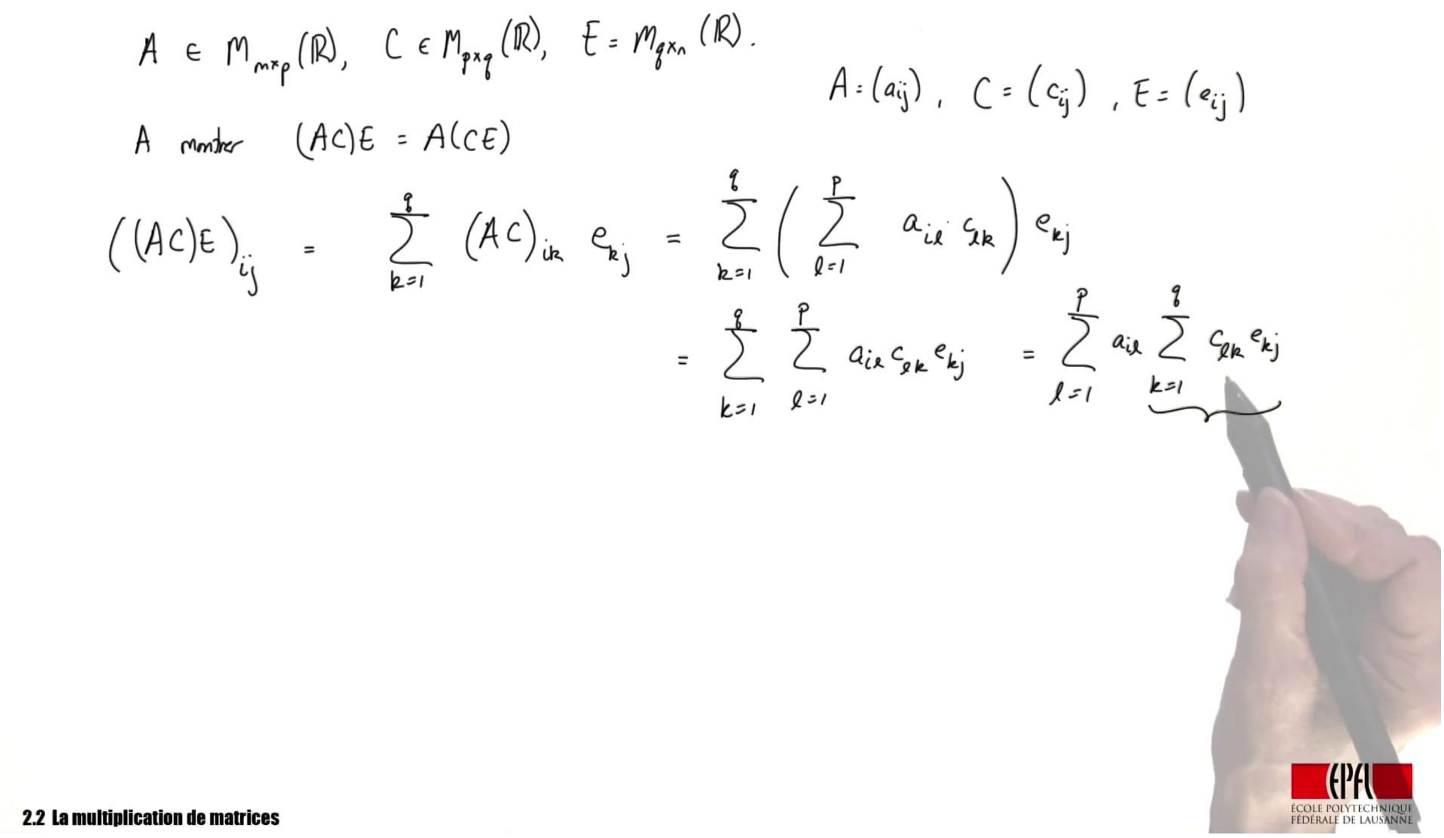


Le but de cette partie est de vous montrer que la multiplication est associative. Donc je reprends mes matrices : A qui est une matrice m x p, ainsi que C qui est une matrice p x q et E qui est une matrice q x n et je prétends que (AC)E = A(CE). Maintenant j'ai besoin de nommer les composantes des matrices. J'inscris que A est la matrice dont la composante ij est a_{ij}, celle de C est c_{ij}, et pour E c'est e_{ij}. Ces deux matrices sont définies et de même taille. Ce que je dois faire, c'est vous démontrer que leurs composantes ij sont les mêmes (pour tout i et j). Je commence par calculer la composante ij de ce produit-là. J'additionne la somme de k=1 jusqu'à un indice que je vais déterminer, puis je prends la matrice AC et je suis sa i-ème ligne, c'est ce que cela m'indique, de l'indice 1 jusqu'au bout. Ensuite je prends la matrice E et je suis sa j-ème colonne, et la colonne de E se termine à q. La ligne de AC finit à q. Maintenant, je dois calculer la composante i de AC.

Notes

Summary

9m 50s



J'ai la première somme obtenue, ici, je reprends la matrice A et je suis de nouveau sa i-ème ligne ici. J'ai besoin d'un nouvel indice ici, on choisit l. Et l va aller de 1 jusqu'à p (comme le nombre de colonnes de A). Ensuite, je reprends la matrice C, je vais suivre sa k-ème colonne, et tout cela est multiplié par le e_{kj}. Cela donne une grande expression avec des nombre réels seulement, il n'y a plus de matrices, et comme on sait que dans les nombre réels on peut distribuer la multiplication par rapport à l'addition, je peux enlever toutes ces parenthèses et les remettre où je veux. Ici c'est la même chose, on a la somme de k=1 jusqu'à q, la somme l=1 jusqu'à p de $a_{il}\cdot c_{lk}\cdot e_{kj}$, et maintenant je vais échanger l'ordre des deux sommes donc l=1 jusqu'à p, et k=1 jusqu'à q... donc en fait, ici, je vais inscrire les termes qui ont un k, si il n'y a pas de k je les inscris ici. Je mets en évidence. Ce qu'il me reste est $c_{lk}\cdot e_{kj}$. Si je regarde cette expression-là, où ai-je pris la matrice C ? Le l est fixe dans cette expression.

Notes

Summary

11m 41s

$A \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, $E = M_{q\times n}(\mathbb{R})$.

$A = (a_{ij})$, $C = (c_{ij})$, $E = (e_{ij})$

A montrer $(AC)E = A(CE)$

$$((AC)E)_{ij} = \sum_{k=1}^{q} (AC)_{ik}\, e_{kj} = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{l=1}^{p} a_{il}\, c_{lk} \right) e_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{p} a_{il}\, c_{lk}\, e_{kj} = \sum_{l=1}^{p} a_{il} \underbrace{\sum_{k=1}^{q} c_{lk}\, e_{kj}}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} a_{il}\, (CE)_{lj}$$

$$= (A(CE))_{ij}$$

pour tout i, j on a $((AC)E)_{ij} = (A(CE))_{ij}$

Donc $(AC)E = A(CE)$ $\boxtimes$.

Donc je prends la l-ème ligne de la matrice C et je la suis jusqu'au bout. Et je prends la j-ème colonne de la matrice E et je la suis jusqu'au bout. Ce terme-là est exactement le produit des matrices C et E où je vais chercher la composante lj. Donc l-ème ligne, j-ème colonne. J'ai fixé le i ici donc je prends la i-ème ligne de la matrice A et je la suis jusqu'au bout, puis la j-ème colonne de la matrice CE et je la suis jusqu'au bout, j'obtiens le produit de ces deux matrices mais en allant chercher la composante ij. Donc si je fais A(CE), i.e. A· le produit CE, les composantes ij sont pareilles. Cela est vrai : pour tout ij, on a donc $((AC)E)_{ij} = (A(CE))_{ij}$*, donc les deux matrices sont pareilles.*

Notes

Summary

13m 24s