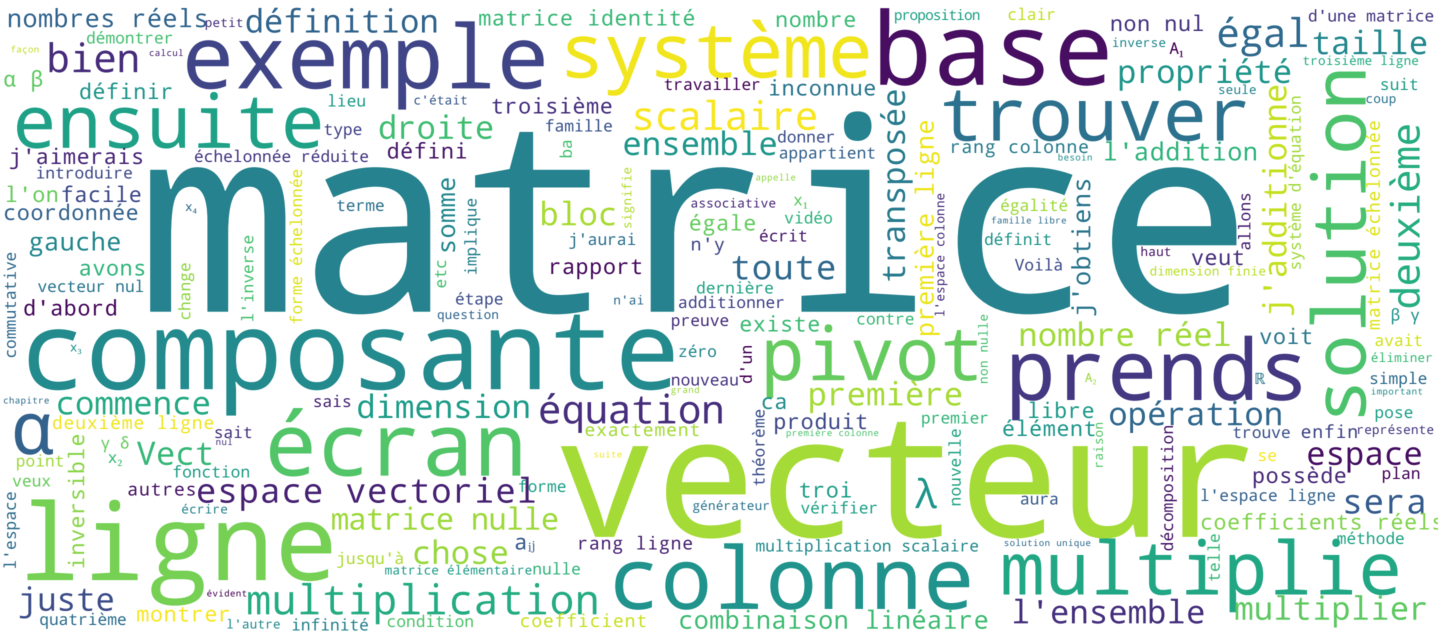
Chapitre 2 : Algèbre matricielle

2.1 Addition, multiplication par un scalaire, transposée

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

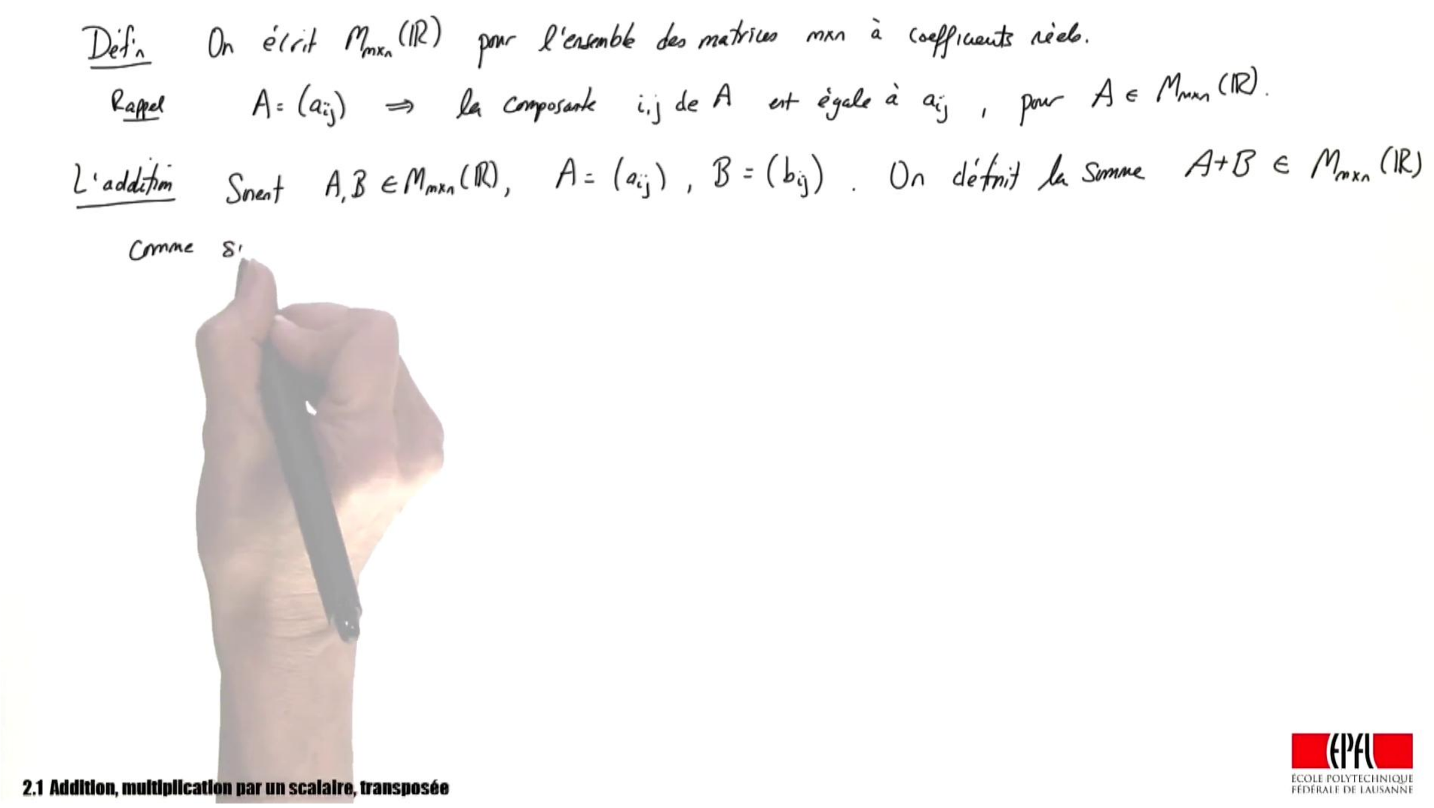
Video

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les systèmes d'équations, et nous avons vu qu'il était convenable de travailler avec les matrices. Dans ce chapitre, nous allons étudier les matrices en tant que telles. On va introduire une addition, une multiplication : une algèbre de matrices. Et puis je commence avec l'addition, la multiplication par un scalaire et ce qui s'appelle la transposée.

Notes

Summary

0m 04s

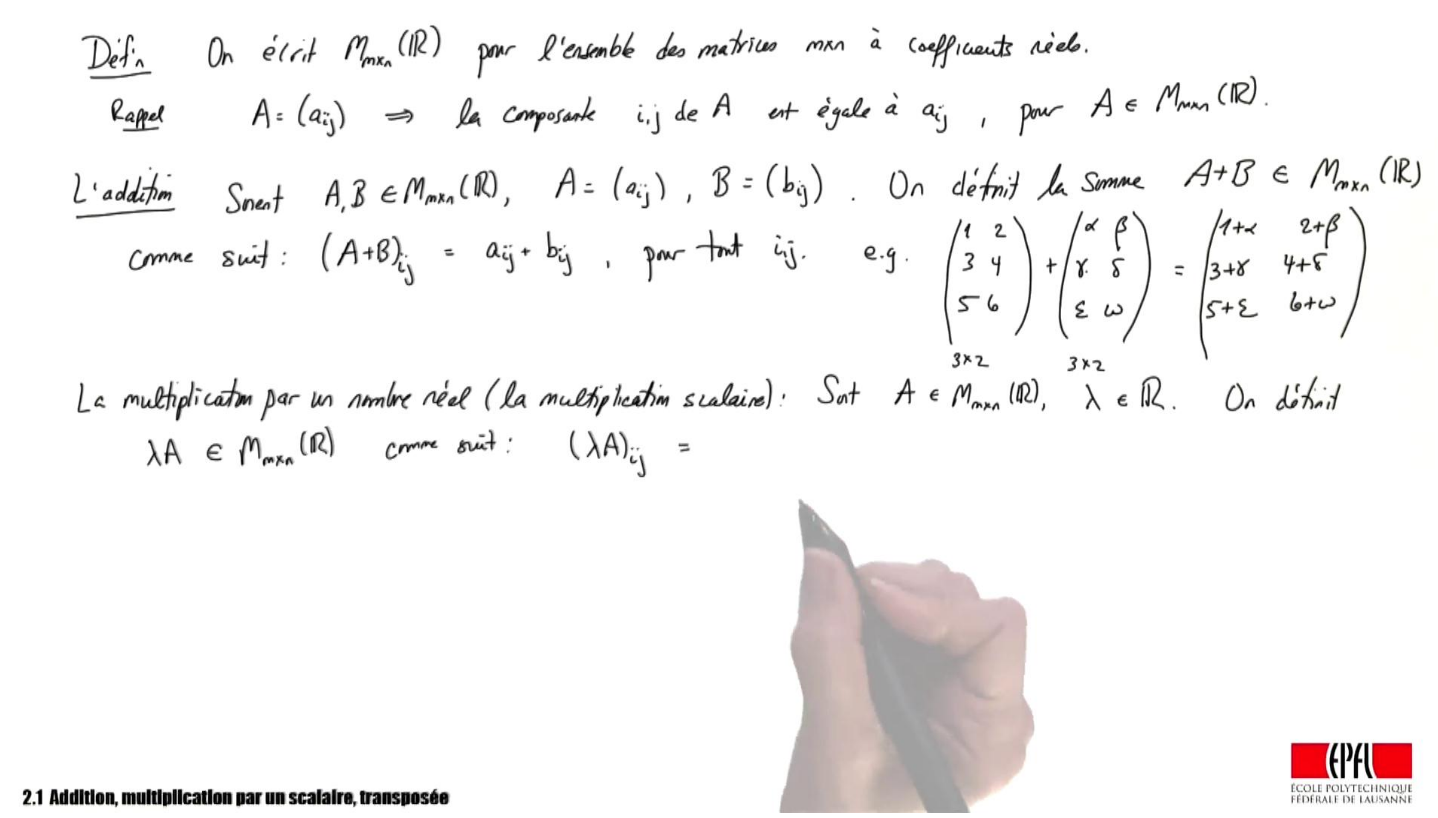


D'abord je définis l'ensemble des matrices parce que l'on a besoin d'une notation Définition : on écrit *M m x n(R)*, l'ensemble des matrices *m x n* à coefficients réels Pour rappel, si on écrit $A = (a_{ij})$, cela indique que la composante *i,j* de la matrice *A* est égale à a_{ij} C'est pour une matrice quelconque *A*. Maintenant, je vais définir l'addition. Je prends deux matrices de même taille. Je note que les composantes de *A* sont a_{ij} et les composantes de *B* sont b_{ij} et on définit leur somme, notée *A+B*. Cela sera aussi une matrice *m x n* à coefficients réels. Et on la définit comme suit : comme j'ai déjà dit quelle est la taille de cette matrice pour la définir je dois juste vous dire quelle est la composante *i,j*.

Notes

Summary

0m 27s



La composante i,j est la composante i,j de A additionnée à la composante i,j de B pour tout i,j Un exemple: Si je prends la matrice *1 2 3 4 5 6* [voir écran] que j'additionne à la matrice α β γ δ ε ω [voir écran] La somme sera aussi une matrice 3×2 Pour trouver la composante *1,1*, j'additionne les composantes *1,1* de ces deux matrices Pour trouver la composante *1,2*, j'additionne les composantes *1,2* de ces deux matrices Pour trouver la composante *2,1*, j'additionne les deux composantes *2,1*. etc. C'est une définition très simple. Maintenant, je définis une autre opération, qui est la multiplication par un nombre réel, qui est appelée la multiplication scalaire Donc, je prends une matrice A, et un nombre réel λ. On va définir λA. Parfois on met un point entre les deux, c'est la même chose. Ce sera aussi une matrice $m \times n$, et on la définit en donnant sa composante i,j. On fait la chose la plus naturelle, je multiplie λ par le nombre a_{ij}, pour tout i,j.

Notes

Summary

1m 51s

Soient $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors les propriétés suivantes sont satisfaites.

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
5. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
6. $1 \cdot A = A$;
7. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
8. $(A^T)^T = A$;
9. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Par exemple, *-1/2* fois la matrice *(α β) (γ δ)* [voir écran] j'obtiens *-1/2α -1/2β -1/2γ -1/2δ* [voir écran] C'est la multiplication par un nombre réel ou multiplication scalaire Maintenant, je vais introduire une opération sur les matrices que nous n'avons pas sur les nombres réels, Nous connaissons l'addition et la multiplication. Ici, je définis la transposée. Je prends une matrice *m x n*, à coefficients réels. Je définis la transposée de *A*, notée *A T*, comme suit : Ce sera une matrice *n x m*, sa composante *i,j* est égale à la composante *j,i* de *A*. Par exemple, avec la matrice *1 2 3 4 5 6* [voir écran] C'est une matrice *3 x 2* Je vais obtenir une matrice *2 x 3*. La composante *1,1* de cette matrice est la composante *1,1* de celle-là. Par contre, la *1,2* ici sera la *2,1* ici. La *1,3* sera la *3,1*. La *2,1* c'est la *1,2*. Le plus simple, c'est de dire qu'on échange lignes et colonnes. C'est une manipulation qui est facile à faire.

Notes

Summary

3m 58s

Soient $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors les propriétés suivantes sont satisfaites.

1. $A + B = B + A$; l'addition est commutative.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$; l'addition est associative.
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;

$\left.\begin{array}{l} \text{3.} \\ \text{4.} \end{array}\right\}$ distributivité

5. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
6. $1 \cdot A = A$;
7. $(A + B)^T = A^T + B^T$; ex $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \omega \end{pmatrix}\right)^T$
8. $(A^T)^T = A$;
9. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

2.1 Addition, multiplication par un scalaire, transposée

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Voyons quelques propriétés, j'ai une liste de propriétés de ces opérations Je commence avec trois matrices, toutes de même taille *m x n*, et deux nombres réels. Alors, on a les propriétés suivantes. L'addition est commutative. C'est évident, car si l'on additionne les deux matrices, les composantes sont juste les sommes des composantes des deux matrices, et l'addition des nombres réels est commutative. Pour la même raison, l'addition est associative. Et puis, on a deux règles de distributivité. Dans un cas, on distribue la multiplication scalaire par rapport à l'addition de matrices. Dans l'autre, on distribue l'addition des scalaires par rapport à la multiplication scalaire. Ca aussi c'est très facile à voir. C'est une sorte d'associativité. On peut multiplier les scalaires d'abord ou faire deux multiplications scalaires. C'est clair que si on multiplie une matrice par *1*, on ne change pas la matrice. Et enfin, un exemple ici: Si je prends la matrice *1 2 3 4 5 6* [voir écran] que j'additionne à *α β γ δ ε ω* [voir écran] Et ensuite je fais la transposée. Donc d'abord je peux faire la somme des deux Ensuite je fais la transposée Ca c'est *2 x 3*, donc la transposée sera *3 x 2*.

Notes

Summary

6m 07s

Soient $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors les propriétés suivantes sont satisfaites.

1. $A + B = B + A$; l'addition est commutative.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$; l'addition est associative.
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$; } distributivité
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$; }
5. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
6. $1 \cdot A = A$;
7. $(A + B)^T = A^T + B^T$; ex
8. $(A^T)^T = A$;
9. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \omega \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 2+\beta & 3+\gamma \\ 4+\delta & 5+\varepsilon & 6+\omega \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 4+\delta \\ 2+\beta & 5+\varepsilon \\ 3+\gamma & 6+\omega \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \varepsilon \\ \gamma & \omega \end{pmatrix}$$

Soit $O \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ la matrice $m\times n$ dont toutes les composantes sont nulles. (On l'appelle la matrice nulle.)

(10) $O + A = A = A + O$

(11) $-1 \cdot A + A =$

2.1 Addition, multiplication par un scalaire, transposée

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

La première ligne dans la première colonne La deuxième ligne dans la deuxième colonne Et maintenant, je peux décomposer Et la première matrice à droite est la transposée de la première matrice à gauche Et la seconde matrice à droite est la transposée de la seconde matrice à gauche Les deux dernières sont aussi faciles. Si je fais la transposée, deux fois, je retombe sur la matrice de départ. Si je multiplie la matrice par un scalaire puis je transpose. C'est comme transposer puis multiplier par le scalaire. Maintenant, j'ai encore quelques propriétés que j'aimerais donner Pour cela, il me faut définir une nouvelle matrice. Soit *O*, la matrice *m x n* dont toutes les composantes sont nulles. On l'appelle la matrice nulle. On n'indique pas nécessairement la taille, il y a plein de matrices nulles. Une autre propriété, si j'additionne *A* à la matrice nulle, je vais retomber sur *A*. Et comme l'addition est commutative, c'est la même chose de l'autre côté. Et puis, une autre propriété, Si je prends le nombre réel *-1*, que je multiplie par la matrice *A*, ensuite j'additionne la matrice *A*. Je vais trouver la matrice nulle.

Notes

Summary

8m 03s

Soient $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors les propriétés suivantes sont satisfaites.

1. $A + B = B + A$; l'addition est commutative.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$; l'addition est associative.
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$; } distributivité
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$; }
5. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
6. $1 \cdot A = A$;
7. $(A + B)^T = A^T + B^T$; ex

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \omega \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 2+\beta & 3+\gamma \\ 4+\delta & 5+\varepsilon & 6+\omega \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 4+\delta \\ 2+\beta & 5+\varepsilon \\ 3+\gamma & 6+\omega \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \varepsilon \\ \gamma & \omega \end{pmatrix}$$

8. $(A^T)^T = A$;
9. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Soit $\mathbf{0} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ la matrice $m\times n$ dont toutes les composantes sont nulles. (On l'appelle la matrice nulle.)

(10) $\mathbf{0} + A = A = A + \mathbf{0}$

(11) $-1 \cdot A + A = \mathbf{0} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
On écrit $-A$ au lieu de $-1 \cdot A$.

(12) $0 \in \mathbb{R}$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $0 \cdot A = \mathbf{0} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,
$\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

2.1 Addition, multiplication par un scalaire, transposée

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Pour cette raison, on se permet d'écrire *-A* au lieu de *-1 A*. Et puis, encore deux propriétés. Si je prends le nombre réel *0*, et la matrice *A*. Je multiplie *A* par *0*, je vais trouver la matrice nulle. Si je prends n'importe quel scalaire, que je multiplie par la matrice nulle, je vais aussi trouver la matrice nulle. Donc, on a toutes ces propriétés, aucune n'est vraiment difficile. Après, on peut travailler avec l'algèbre des matrices.

Notes

Summary

10m 20s