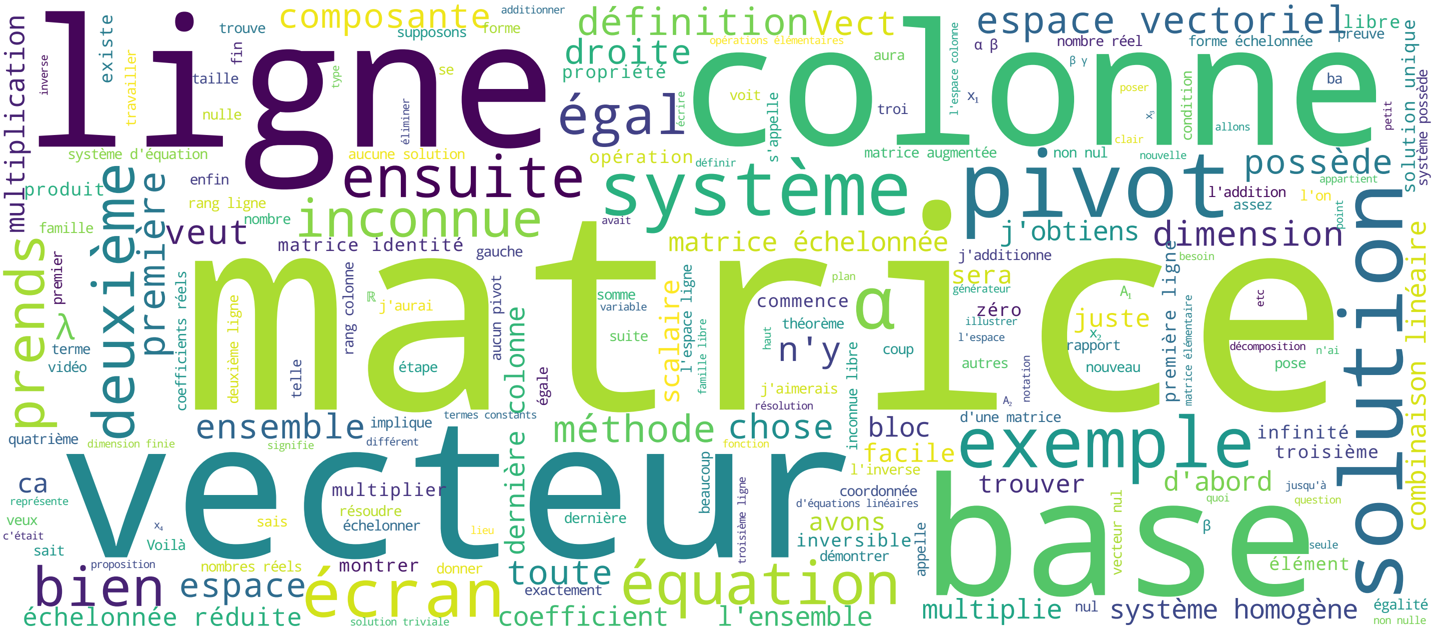
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 1 : Systèmes d'équations linéaires et matrices

1.8 Résumé de la méthode, systèmes homogènes

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

1.8 Résumé de la méthode, systèmes homogènes

Nous arrivons à la fin du premier chapitre qui était consacré à la résolution de systèmes d'équations linéaires. Et nous avons développé une méthode, basée sur la méthode de Gauss, pour échelonner une matrice. Maintenant, j'aimerais faire deux choses pour terminer le chapitre. Je vais résumer la méthode, puis ensuite j'aimerais parler d'un type de systèmes particulier qui s'appelle un système homogène et qui sera important par la suite.

Notes

Summary

0m 03s

Résumé

Soit un système

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

m équations
n inconnues.

A la matrice augmentée du système.
B une matrice échelonnée ligne équivalente à A.

① Si B possède un pivot dans sa dernière colonne, le système ne possède aucune solution.

② Si B possède n pivots et aucun pivot dans sa dernière colonne,

1.8 Résumé de la méthode, systèmes homogènes

Donc d'abord, je fais ce résumé. Donc, on va commencer avec un système. Soit un système, donc j'ai, m équations et j'ai n inconnues Ensuite, je vais poser A la matrice augmentée et puis, ensuite, on va l'échelonner pour arriver à B une matrice échelonnée qui est lignes équivalentes à A. (Par le théorème que nous avons vu on peut toujours faire ça). Ensuite, si B possède un pivot dans sa dernière colonne alors le système ne possède aucune solution (ça on l'a déjà vu). Maintenant, si ce n'est pas le cas, alors on va se demander s'il y a une infinité ou s'il y a une solution unique. Donc supposons que B ne possède pas de pivot dans sa dernière colonne, (donc on sait qu'il y a une solution au moins) et supposons que B a n pivots. Si B possède n pivots et aucun pivot dans sa dernière colonne alors, bon, déjà, ça veut dire qu'il y a une solution au moins, et comme il y a n pivots, ça veut dire qu'il y a un pivot pour x_1, un pivot pour x_2,..., x_n. donc chaque inconnue a un pivot dans sa colonne. Du coup il n'y a pas de variable (ou inconnue) libre et donc il va y avoir une solution unique.

Notes

Summary

0m 30s

$$\begin{cases} x & +y & -z & +t & =0 \\ x & -y & & +2t & =0 \\ 2x & & & +t & =0 \\ & & -z & +2t & =0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1.8 Résumé de la méthode, systèmes homogènes

Maintenant supposons que B possède moins de pivots. Donc si B possède disons r pivots avec $r < n$ et toujours aucun pivot dans sa dernière colonne Alors ça veut dire quoi ? Il n'y a aucun pivot dans sa dernière colonne donc au moins une solution, maintenant, je compte les pivots, et je n'en ai pas assez pour couvrir toutes les colonnes des inconnues. Donc, du coup, il y a une inconnue qui n'a pas de pivot dans sa colonne. Cette inconnue là va être une inconnue libre. Et donc, le système possède une infinité de solutions. Donc ça, c'est un résumé de notre méthode pour résoudre les systèmes. Bon ce n'est pas la méthode même, mais la conclusion à la fin de la méthode.

Notes

Summary

3m 00s

Déf^{n} Un système d'équations linéaires est dit homogène si tous les termes constants sont nuls.

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0.$$

Un système homogène possède toujours au moins une solution, notamment la solution triviale $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$.

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x - y + 2t = 0 \\ 2x + t = 0 \\ -z + 2t = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

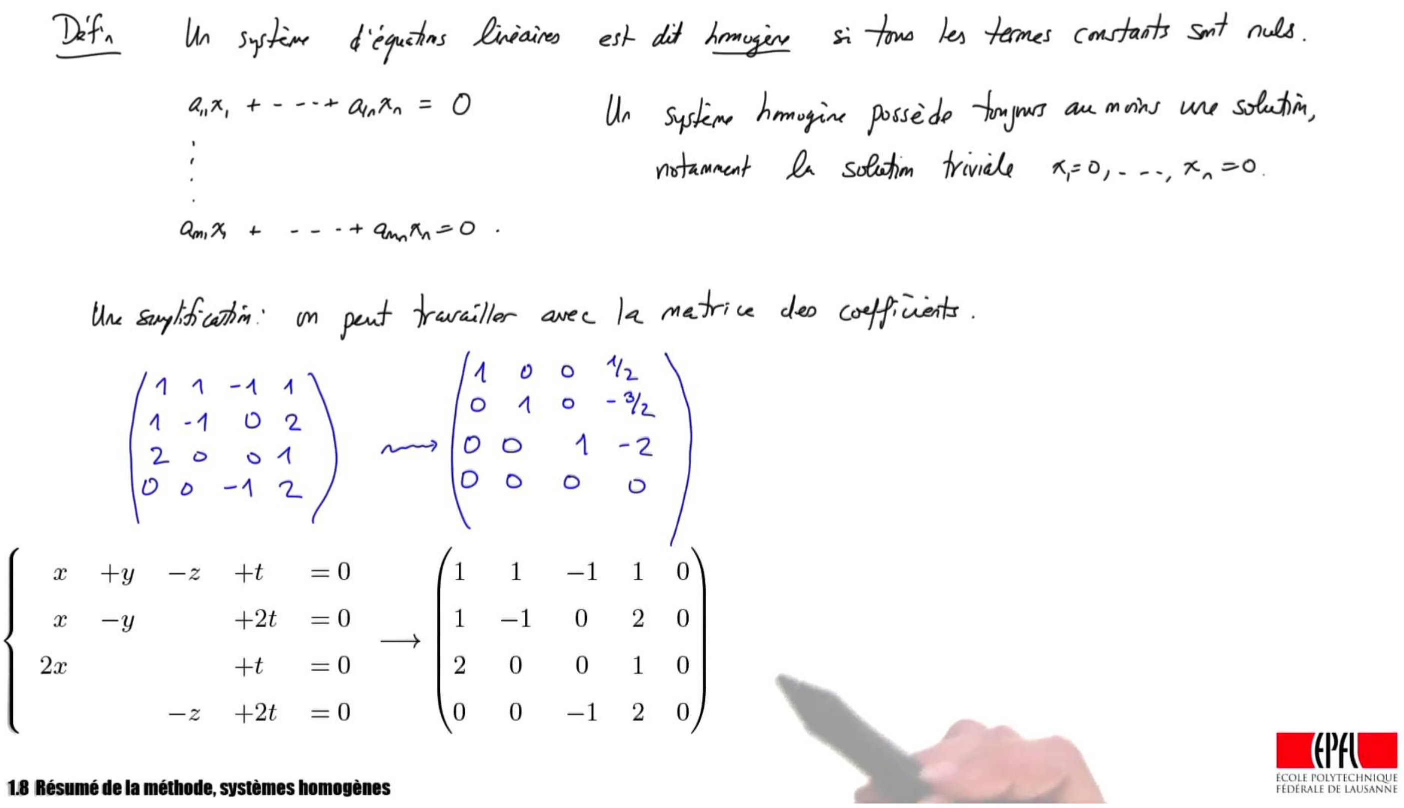
1.8 Résumé de la méthode, systèmes homogènes

Maintenant, j'aimerais parler d'un type de systèmes qui est plus facile à résoudre. Ça s'appelle un système homogène. Je donne d'abord la définition, puis un exemple pour illustrer pourquoi c'est plus facile. Donc, définition : un système d'équations linéaires est dit homogène si tous les termes constants sont nuls. C'est à dire si j'ai un système d'équations de la forme [voir écran] (donc tous les termes de droite sont nuls). Maintenant, ce qui est différent avec un système homogène c'est qu'un tel système possède toujours au moins une solution notamment la solution qu'on appelle la solution triviale. C'est la solution où l'on pose tous les $x_i = 0$, évidemment, cette solution satisfait toutes les équations. Donc ici, pour un système homogène, on n'a pas le problème de n'avoir aucune solution. On est dans un cas où soit il y a une solution unique qui sera cette solution triviale, soit il y a une infinité de solutions. Donc en fait, on doit juste déterminer par notre méthode s'il y a des variables libres ou pas.

Notes

Summary

4m 05s



Maintenant, il y a autre chose qu'on peut simplifier quand on a un système homogène, vous imaginez un système homogène et vous faites les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée, vous n'aurez jamais changé la dernière colonne (celle qui n'a que des zéros), car si vous multipliez, échangez, ou additionnez, tous ces *0* resteront, donc il n'y a aucune raison de les garder. Donc une simplification de la méthode, c'est qu'on peut travailler avec la matrice des coefficients. C'est la première fois qu'on se sert de la matrice des coefficients, jusqu'à maintenant on a toujours utilisé toute la matrice augmentée, mais ici, dans cet exemple, au lieu de travailler avec celle-ci, je peux travailler avec la matrice des coefficients. Après, je fais la procédure d'échelonnage, on a eu beaucoup de pratique, donc je ne vais pas le faire, je vais juste vous montrer ce que ça donne. Donc je vais échelonner la matrice, et quand j'aurai échelonné la matrice, j'obtiendrai la matrice suivante : bon, c'est une possibilité... En fait, c'est pas vrai, c'est en fait la seule possibilité pour cette matrice. Elle est même échelonnée réduite.

Notes

Summary

5m 54s

Déf$_n$ Un système d'équations linéaires est dit homogène si tous les termes constants sont nuls.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Un système homogène possède toujours au moins une solution, notamment la solution triviale $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$.

Une simplification : on peut travailler avec la matrice des coefficients.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

t inconnue libre, $t = \alpha$.

L'ensemble des solutions $\{(-1/2\alpha, 3/2\alpha, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & -z & +t & = 0 \\ x & -y & & +2t & = 0 \\ 2x & & & +t & = 0 \\ & & -z & +2t & = 0 \end{array}\right. \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1.8 Résumé de la méthode, systèmes homogènes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Je suis allé jusqu'à la forme échelonnée réduite, comme ça vous pouvez faire l'exercice à la maison, vous essayez l'échelonnage, et voyez si vous trouvez ça. Vous devez trouver exactement la même chose, si vous avez une matrice échelonnée réduite. Et puis maintenant, je vais remettre la colonne que j'ai enlevée. Donc ici, je remets la colonne des termes constants, et maintenant, je peux faire la procédure de résolution comme avant. Donc je regarde la matrice : il y a trois pivots. Dès lors, il y a une colonne, la colonne pour la variable t, où il n'y a pas de pivot. Ainsi t est une inconnue libre. Donc je pose $t = \alpha$, et puis après, je vous laisse vérifier l'ensemble de solutions. En fait ici, c'est facile, parce qu'on a une matrice échelonnée. Donc ici je trouve que $x = (-1/2)\cdot\alpha$ $y = 3/2\cdot\alpha$ $z = 2\alpha$ $t = \alpha$ et α peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

Notes

Summary

7m 26s