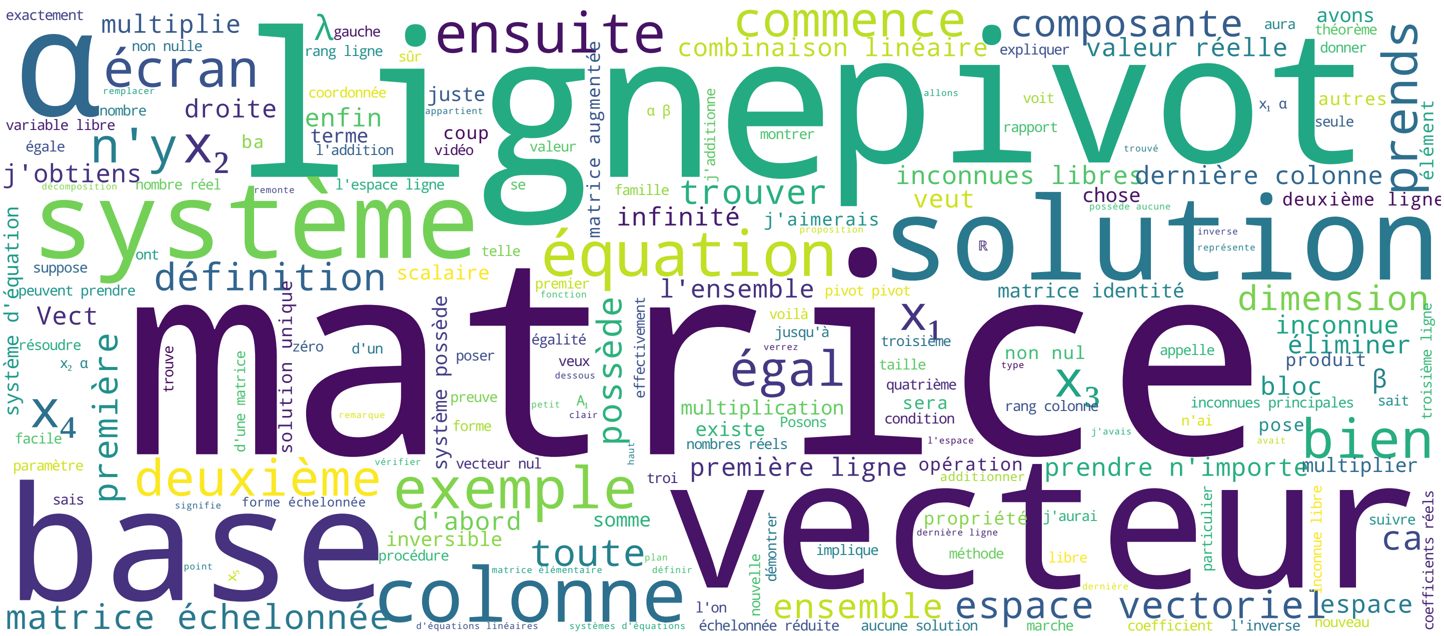
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 1 : Systèmes d'équations linéaires et matrices

1.7 Résolution de systèmes linéaires

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

1.7 Résolution de systèmes linéaires

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Ici, enfin, on revient à nos systèmes d'équations linéaires. On a passé pas mal de temps à manipuler les matrices, les matrices en tant que telles. Et, maintenant, on aimerait utiliser ce qu'on a appris pour résoudre des systèmes d'équations. D'abord je vous explique la marche à suivre, et après, je fais un assez grand exemple.

Notes

Summary

0m 03s

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

<u>Marche à suivre</u>

1. Posons A la matrice augmentée du système.
2. Utiliser la méthode de Gauss pour transformer A en une matrice B <u>échelonnée</u> ; B est ligne équivalente à A.
3. Si B possède une ligne de la forme $0 \; 0 \; \cdots \; 0 \; c$, $c \neq 0$, alors le système ne possède aucune solution.

Donc je commence avec un système d'équations linéaires aux inconnues x_1 jusqu'à x_n. Donc j'ai m équations n inconnues et la marche à suivre, pour résoudre, c'est... d'abord, je vais poser la matrice augmentée du système, donc posons A la matrice augmentée, ensuite, il y a une longue étape : j'utilise la méthode d'élimination de Gauss pour transformer cette matrice A en une matrice B qui est une matrice échelonnée, juste échelonnée. Et cette matrice B, par définition, est ligne équivalente à A Troisième étape : Donc maintenant j'ai cette matrice échelonnée devant moi et j'aimerais lire ce que je peux sur le système d'équations. Si cette matrice échelonnée possède une ligne de la forme suivante : une ligne comme ça : $0 \; 0 \ldots \; 0$ et tout au bout, une valeur non nulle. Alors, ça veut dire quoi ? Quand je remets des inconnues, j'ai une équation qui dit : $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = c$ qui est une valeur non nulle. Visiblement, ce n'est pas possible, là, le système ne possède aucune solution. Donc dire qu'il y a une ligne comme ça, c'est équivalent à dire que B possède un pivot dans la dernière colonne.

Notes

Summary

0m 24s

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Marche à suivre

① Posons A la matrice augmentée du système.

② Utiliser la méthode de Gauss pour transformer A en une matrice B échelonnée ; B est ligne équivalente à A.

③ Si B possède une ligne de la forme $0 \; 0 \; \cdots \; 0 \; c$, $c \neq 0$, alors le système ne possède aucune solution.

④ Si B ne possède pas de pivot dans sa dernière colonne, alors le système possède au moins une solution.

Déf'n Les inconnues dont la colonne correspondante (dans la matrice échelonnée) ne possède pas de pivot s'appellent les inconnues libres. Les inconnues dont la colonne correspondante possède un pivot s'appellent les inconnues principales.

Dans le cas ④, l'ensemble des solutions est décrit/trouvé comme suit:

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Maintenant, si on n'a pas ça, si B ne possède pas de pivot dans la dernière colonne, alors, il est sûr que le système possède au moins une solution. Et puis maintenant, on se rappelle que "au moins une solution" ça peut être ou bien, une infinité, ou bien, une solution unique. Et maintenant je dois vous expliquer comment on détermine dans quel cas on est et comment on décrit l'ensemble des solutions quand il y en a une infinité. Donc pour ça, je pose une définition : Les inconnues dont la colonne correspondante dans la matrice échelonnée ne possèdent pas de pivot, ces inconnues-là s'appellent les inconnues libres. Les autres, c'est à dire les inconnues dont la colonne correspondante possède un pivot, s'appellent les inconnues principales. Donc on a les inconnues libres et les inconnues principales. Maintenant dans le cas où B ne possède pas de pivot dans la dernière colonne je vais vous expliquer comment on décrit l'ensemble des solutions. Donc dans le cas n°4, l'ensemble des solutions est décrit comme suit ("décrit" ou bien "trouvé") les inconnues libres peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. On peut les choisir librement, c'est pour ça qu'on les appelle les inconnues libres.

Notes

Summary

2m 32s

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.7 Résolution de systèmes linéaires

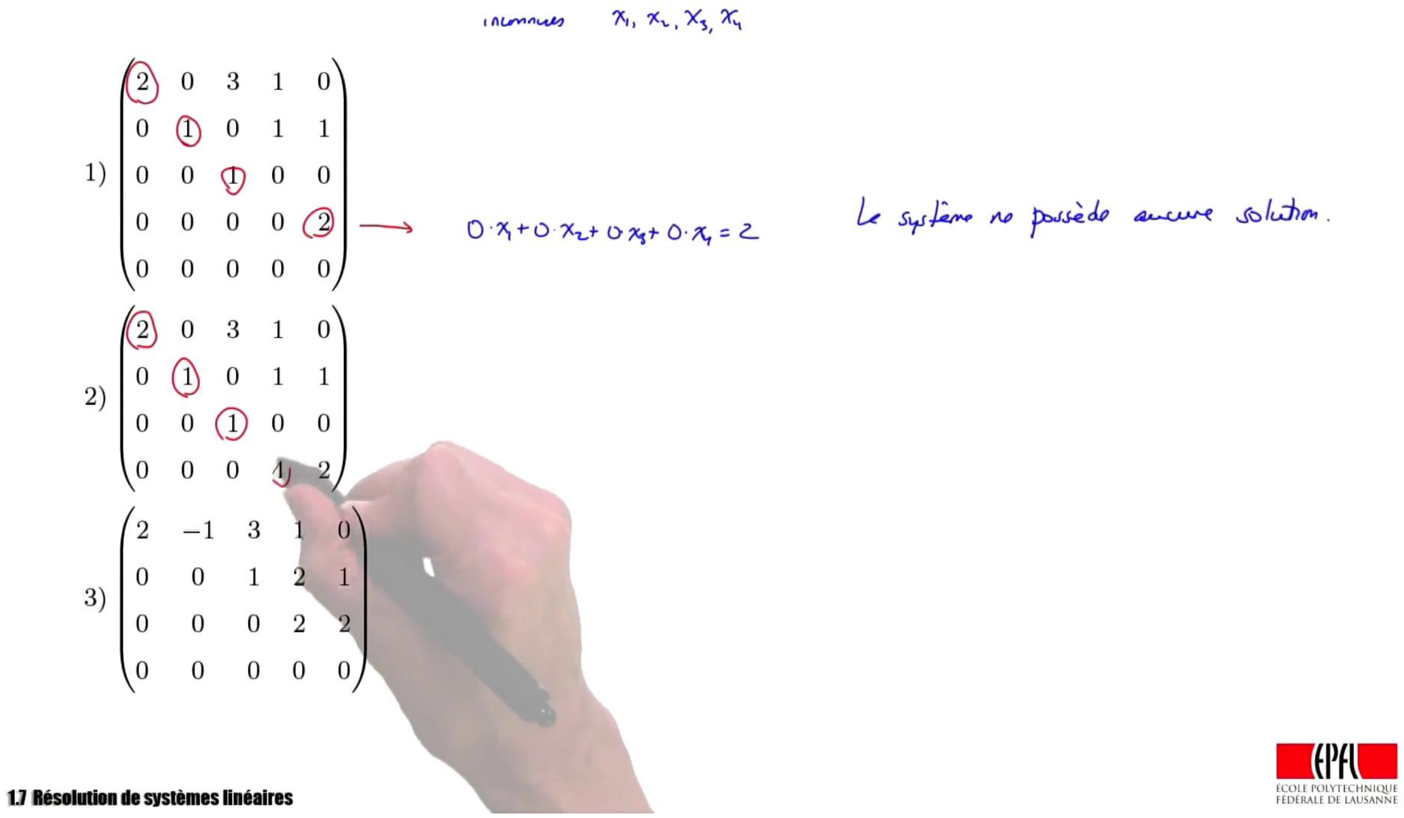
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Et puis je vais les appeler les paramètres (vous verrez dans un exemple). Et puis ensuite, on va reprendre les équations et on résout chaque équation pour trouver les valeurs des inconnues principales en termes de ces inconnues libres. Donc maintenant, je vais faire plusieurs exemples.

Notes

Summary

5m 02s



Donc d'abord, je me donne des matrices qui ont déjà été échelonnées. Après on va faire un exemple où on commence vraiment avec un système et on fait toute la procédure, mais ici, je veux expliquer la méthode, la marche à suivre. Donc je suppose que j'avais un système, que j'ai déjà échelonné la matrice augmentée associée au système, et que j'arrive à une de ces trois matrices là, donc il y a trois cas de figure. Dans le premier exemple ici, je regarde, et puis, là, effectivement, les pivots sont où ? les pivots sont là... et là, oups, il y a un pivot qui est dans la dernière colonne. Justement, ce que je voulais dire avant, c'est que cette ligne là, (donc ici j'ai des inconnues x_1, x_2, x_3, x_4, dans les trois cas ici) ici, cette ligne, elle veut dire que : $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2$ et, visiblement, là, il n'y a aucune solution. Donc le système ne possède aucune solution. Donc ça c'est ce que j'avais dit avant. Maintenant dans ce cas, le deuxième, cette matrice échelonnée, les pivots sont là... et, en particulier, je n'ai pas de pivot dans la dernière colonne donc c'est sûr que le système possède au moins une solution.

Notes

Summary

5m 40s

inconnues x_1, x_2, x_3, x_4

$$1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 2$$

Le système ne possède aucune solution.

$$2)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

aucune inconnue libre.

$4x_4 = 2 \Rightarrow x_4 = 1/2$

$x_3 = 0$

$x_2 + x_4 = 1$; $x_2 + 1/2 = 1$; $x_2 = 1/2$

$2x_1 + 3\cdot 0 + 1/2 = 0$; $2x_1 = -1/2$; $x_1 = -1/4$

$$3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et puis maintenant, je me questionne sur cette histoire d'inconnues libres, inconnues principales. Ici, donc ça c'est la colonne de x_1, là il y a un pivot, x_2, là il y a un pivot x_3, pivot, x_4, pivot, donc du coup, il n'y a pas d'inconnue libre. Et vous verrez que ça veut dire que le système possède une solution unique. Bon, ça ne change rien dans la procédure mais je fais la remarque qu'il n'y a aucune inconnue libre. Et puis maintenant, je commence avec la dernière ligne, comme nous avons déjà vu avant, et je remonte les lignes, et je résous, au fur et à mesure, les équations. Donc la dernière ligne ça me dit que $4x_4 = 2$ et donc $x_4 = 1/2$. La troisième ligne me dit que $x_3 = 0$. La deuxième ligne me dit que $x_2 + x_4 = 1$ donc $x_2 + 1/2 = 1$ et donc $x_2 = 1/2$. Et puis la première ligne me dit que $2x_1 + 3\cdot 0 + 1/2 = 0$ Donc du coup $2x_1 = -1/2$ et donc, $x_1 = -1/4$. Donc là, il n'y a pas de variable libre, on a trouvé des valeurs précises, ici il y a une solution unique : qui est donc, x_1, c'est $-1/4$, x_2, c'est $1/2$, x_3, c'est 0, et x_4, c'est $1/2$.

Notes

Summary

7m 04s

inconnues x_1, x_2, x_3, x_4

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 2$$

Le système ne possède aucune solution.

$$2)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

aucune inconnue libre.

une solution unique $(-1/4, 1/2, 0, 1/2)$.

$4x_4 = 2 \Rightarrow x_4 = 1/2$

$x_3 = 0$

$x_2 + x_4 = 1$; $x_2 + 1/2 = 1$; $x_2 = 1/2$

$2x_1 + 3\cdot 0 + 1/2 = 0$; $2x_1 = -1/2$; $x_1 = -1/4$

$$3)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_2 inconnue libre. Posons $x_2 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$2x_4 = 2$, $x_4 = 1$.

$x_3 + 2x_4 = 1$; $x_3 + 2 = 1$; $x_3 = -1$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Et maintenant, dans le troisième exemple, là, j'ai un pivot et puis là j'ai un pivot, là j'ai un pivot. En particulier, il n'y a pas de pivot dans la dernière colonne, c'est sûr que le système possède au moins une solution, et puis ici, on est dans un cas où il y a effectivement une variable libre donc : x_2 est une inconnue libre (on dit aussi variable libre). Donc x_2 est une inconnue libre, je vais poser x_2 = un paramètre, disons α. Posons $x_2 = \alpha$ et α peut prendre n'importe quelle valeur réelle, on aura quand même une solution correspondante. Donc après je commence de nouveau en bas, je remonte les équations, et puis je trouve les autres inconnues en termes de valeurs réelles et de ce paramètre. Donc cette ligne là me dit que $2x_4 = 2$ donc $x_4 = 1$ Ensuite, cette ligne là me dit que $x_3 + 2x_4 = 1$ donc $x_3 + 2 = 1$ et donc $x_3 = -1$. Et puis, la première ligne me dit que $2x_1 - x_2 + 3(-1) + 1 = 0$ Maintenant on a dit qu'on remplaçait x_2 par le paramètre α donc j'ai $2x_1 - \alpha - 2 = 0$ je passe de l'autre côté, j'ai $2x_1 = \alpha + 2$ et donc $x_1 = 1/2\ \alpha + 1$.

Notes

Summary

8m 52s

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +x_2 & & -x_4 & & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & & -x_4 & & = 4 \\ & x_2 & +2x_3 & -x_4 & -2x_5 & = 10 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_5 & = 1 \\ -x_1 & -2x_2 & & +2x_4 & & = -5 \end{array}\right. \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 10 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ & & & & & \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 10 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

1.7 Résolution de systèmes linéaires

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc ici, comme α peut prendre n'importe quelle valeur réelle, j'ai une infinité de solutions. Et ces solutions, je les décris comme suit, j'ai $x_1 = 1/2\ \alpha + 1$, j'ai $x_2 = \alpha$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$, et α peut prendre n'importe quelle valeur réelle. Donc, maintenant, je fais ça depuis le début, avec un grand système, je fais toute la procédure pour bien vous expliquer.

Notes

Summary

10m 49s

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & -x_4 & & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & & -x_4 & & = 4 \\ & x_2 & +2x_3 & -x_4 & -2x_5 & = 10 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_5 & = 1 \\ -x_1 & -2x_2 & & +2x_4 & & = -5 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 10 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2' = -2L_1 + L_2 \\ L_4' = -3L_1 + L_4 \\ \longrightarrow \\ L_5' = L_1 + L_5 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc voilà, je commence avec un système d'équations, donc j'ai 5 équations, 5 inconnues, c'est un grand exemple. J'ai écrit d'abord la matrice augmentée du système, qui est celle-ci. D'abord, je dois échelonner cette matrice, je vois déjà que j'ai un pivot dans la bonne position, je commence à éliminer en dessous de ce pivot, bon, là, je n'ai pas besoin d'éliminer, j'ai déjà un *0*, je fais plusieurs étapes en une seule (maintenant on en prend l'habitude) donc, la deuxième ligne, je vais la remplacer : $L_2' = -2\ L_1 + L_2$ donc ça fait *- 2 + 2 = 0 -2 + 1 = -1 0 2 - 1 = 1 0 -6 + 4 = -2* Et ici, je dois éliminer ce *3* donc je fais $L_4' = -3\ L_1 + L_4$ *-3 + 3 = 0 -3 + 1 = -2 0 -1 = -1 3 - 1 = 2 0 + 1 = 1 - 9 + 1 = - 8* Et ensuite, ici, je vais faire la ligne 5, c'est juste $L_5' = L_1 + L_5$ Donc j'ai *1 + (-1) = 0 -1 0 1 0 -2* Ok, je vérifie...

Notes

Summary

11m 29s

$$\left\{\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & & -x_4 & & =3 \\ 2x_1 & +x_2 & & -x_4 & & =4 \\ & x_2 & +2x_3 & -x_4 & -2x_5 & =10 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_5 & =1 \\ -x_1 & -2x_2 & & +2x_4 & & =-5 \end{array}\right. \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 10 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.7 Résolution de systèmes linéaires

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

c'est juste. Ce qu'on vient de faire, c'est qu'on a éliminé ici donc là j'ai encore un pivot dans la deuxième colonne donc je dois éliminer ici. Il y aura de nouveau plusieurs étapes pour faire ça. Donc j'élimine ici, j'ai $L_3' = L_2 + L_3$ donc j'additionne simplement, donc j'ai *0 0 2 0 -2 8*. Ensuite, ici, j'élimine ligne 4, la nouvelle, c'est $L_4' = -2\, L_2 + L_4$ donc j'ai *0 0 -1 0 1 -4*. Et puis enfin, ligne 5, la nouvelle, c'est $L_5' = -\, L_2 + L_5$ donc j'ai *0 0 0 0 0 0*. Donc ça, c'est ce qu'on a fait, c'est la matrice que j'ai obtenue. Donc normalement, ici, je devrais éliminer mais comme nous sommes des êtres humains et pas des machines, je vais d'abord échanger ces deux lignes, parce que c'est plus facile à éliminer le *2* que le *-1*. Donc je vais échanger les lignes 3 et 4. Ça, c'est une étape qu'une machine ne ferait pas, si vous programmiez l'algorithme, parce que les fractions n'embêtent pas la machine, mais moi j'échange. Et puis enfin, il y a une dernière étape, c'est que (pivot, pivot, pivot et donc) je dois éliminer ce *2*.

Notes

Summary

13m 02s

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 10 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_4 = -5 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 10 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

x_4 et x_5 inconnues libres.
Posons $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$,
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$-x_3 + x_5 = -4$; $-x_3 + \beta = -4$
$x_3 = \beta + 4$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4' = 2L_3 + L_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.7 Résolution de systèmes linéaires

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc je fais la nouvelle ligne 4, c'est : $L_4' = 2L_3 + L_4$ donc j'ai *0 0 0 0 0 0* Donc j'ai deux lignes de *0*. Donc ça c'est la matrice, elle est effectivement échelonnée : là il y a un pivot, pivot, pivot toujours plus à droite, j'ai deux lignes de 0 qui sont en bas de la matrice donc elle est échelonnée. Elle n'est pas échelonnée réduite mais c'est pas grave, elle est échelonnée. Et puis maintenant, ici, cette fois, x_1 a un pivot, x_2 a un pivot, x_3 a un pivot mais x_4 et x_5 ont des colonnes où il n'y a pas de pivot donc x_4 et x_5 vont être mes inconnues libres. Donc x_4 et x_5 sont les inconnues libres. Je vais poser $x_4 = \alpha$ et $x_5 = \beta$ et α et β peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. Et les autres inconnues, les inconnues principales x_1,x_2 et x_3, je vais les trouver en termes de ces inconnues libres et de valeurs réelles. Cette ligne là me dit que $-x_3 + x_5 = -4$ donc $-x_3 + \beta = -4$ donc, enfin, $x_3 = \beta + 4$. Cette ligne là me dit que $-x_2 + x_4 = -2$ donc $-x_2 + \alpha = -2$ donc, du coup, $x_2 = \alpha + 2$.

Notes

Summary

14m 58s

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +x_2 & & -x_4 & & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & & -x_4 & & = 4 \\ & x_2 & +2x_3 & -x_4 & -2x_5 & = 10 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_5 & = 1 \\ -x_1 & -2x_2 & & +2x_4 & & = -5 \end{array}\right. \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 10 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4' = 2L_3 + L_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_4 et x_5 inconnues libres.
Posons $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$-x_3 + x_5 = -4$; $-x_3 + \beta = -4$
$x_3 = \beta + 4$

$-x_2 + x_4 = -2$; $-x_2 + \alpha = -2$
$x_2 = \alpha + 2$

$x_1 + (\alpha + 2) - \alpha = 3$
$x_1 = 1$.

une infinité de solutions.
$\{(1, \alpha+2, \beta+4, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

1.7 Résolution de systèmes linéaires

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Puis, la première ligne me dit que $x_1 + (\alpha + 2) + 0x_3 - \alpha = 3$ donc les α disparaissent, et j'ai $x_1 = 1$. Comme α et β peuvent prendre n'importe quelle valeur, il y a une infinité de solutions décrites ainsi x_1 c'est 1, x_2 c'est $\alpha + 2$, x_3 c'est $\beta + 4$, x_4 c'est α, x_5 c'est β, et α et β peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle.

Notes

Summary

16m 55s