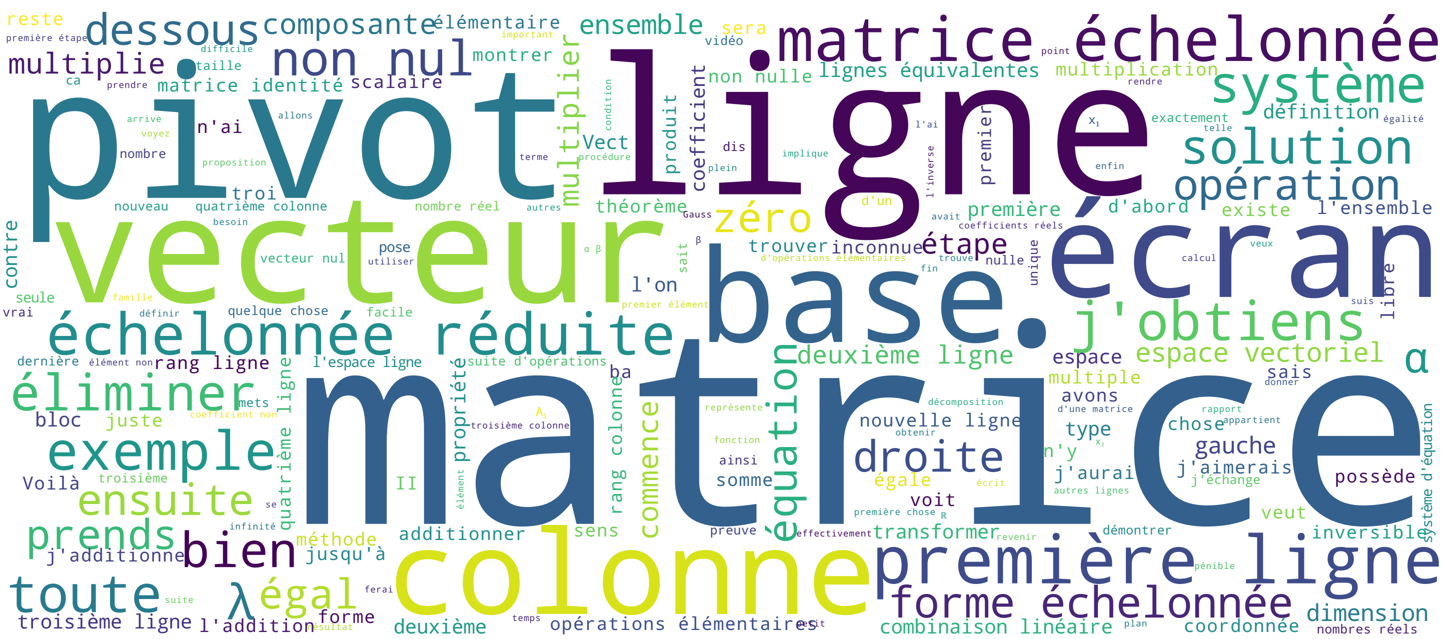
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 1 : Systèmes d'équations linéaires et matrices

1.6 La méthode d'élimination de Gauss

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

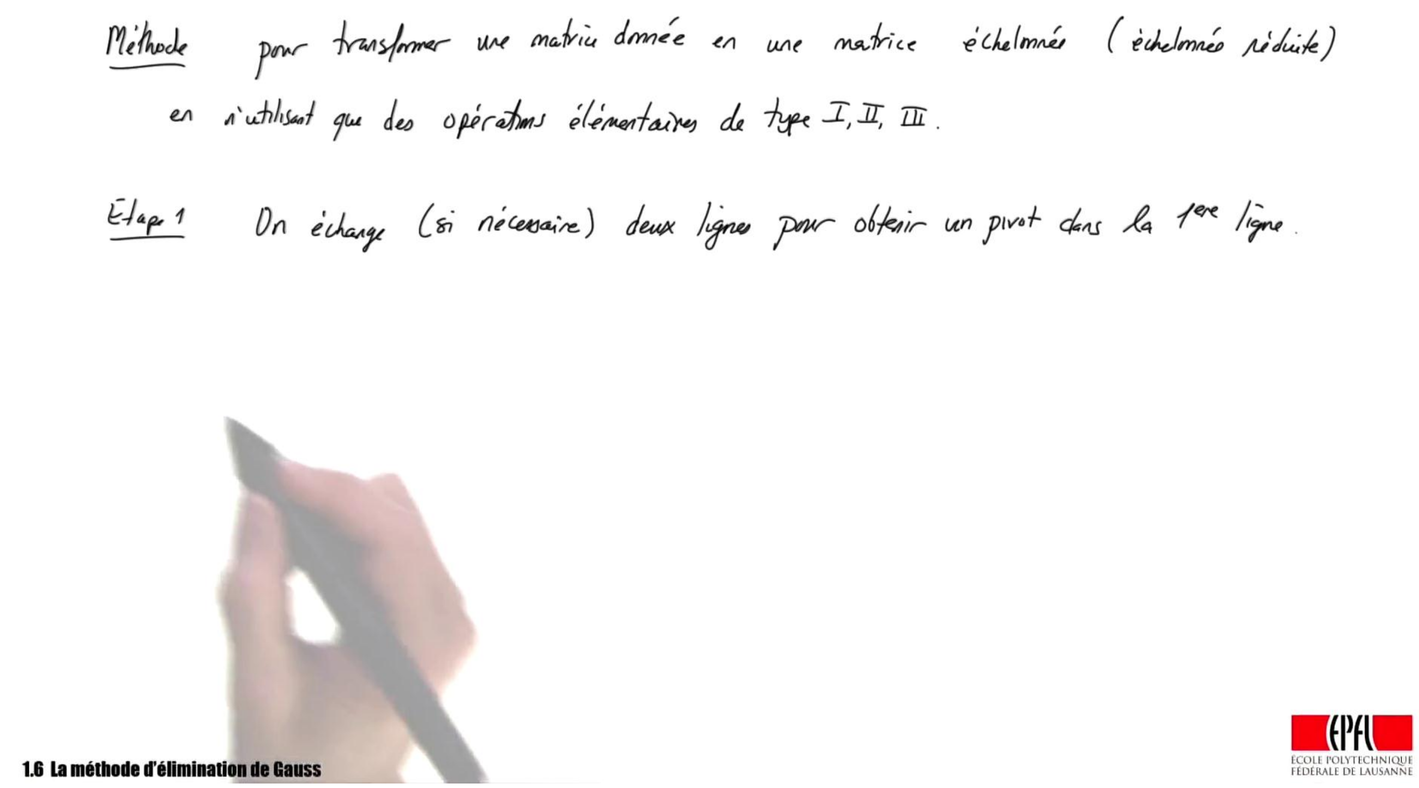
EPFL

Dans cette vidéo, nous allons voir une méthode très importante, qui s'appelle la méthode d'élimination de Gauss. C'est une méthode pour transformer une matrice donnée en une matrice échelonnée, ou bien même jusqu'à une matrice échelonnée réduite, en n'utilisant que des opérations élémentaires de type I, II et III.

Notes

Summary

0m 04s



Méthode de l'élimination de Gauss : Pour transformer une matrice donnée en une matrice échelonnée, ou bien même échelonnée réduite, en n'utilisant que des opérations de type I, II et III. Ce résultat aura d'autres implications plus tard, mais en particulier, si la matrice représente un système d'équations et que l'on remet à la fin des inconnues, alors on sait, d'après ce que l'on a déjà fait, que le système qui correspond à la matrice à la fin, a le même ensemble de solutions que le système original, car on n'aura utilisé que des opérations de type I, II et III. Maintenant, je vous explique la méthode. Il y a plusieurs étapes. Étape 1: D'abord, si nécessaire, on va échanger des lignes de la matrice, pour obtenir un pivot dans la première ligne. Je rappelle que le pivot dans une ligne c'est le premier élément non nul de cette ligne. Dans notre procédure, il doit être dans chaque ligne plus à droite que celui de la ligne précédente. Donc ici, par exemple, je commence avec la matrice [voir écran] Normalement, pour que ça soit échelonné, il faut que le premier élément non nul dans chaque ligne soit plus à droite que le premier élément non nul dans la ligne précédente, ça n'est pas vrai ici.

Notes

Summary

0m 24s

Méthode pour transformer une matrice donnée en une matrice échelonnée (échelonnée réduite) en n'utilisant que des opérations élémentaires de type I, II, III.

Étape 1 On échange (si nécessaire) deux lignes pour obtenir un pivot dans la 1ère ligne.

ex. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Etape 2 Additionner des multiples de la 1ère ligne à chacune des autres lignes pour obtenir des composantes nulles en dessous du pivot de la 1ère ligne.

Etape 3 On répète Etapes 1 et 2 pour la matrice obtenue en ignorant la 1ère ligne et la colonne contenant le pivot (et les colonnes à gauche de celle-ci).

Donc je ferai une opération de type I, où j'échange les lignes 1 et 2, et puis le résultat me donnera une matrice avec un pivot, dans la première ligne. Donc ça, c'est la première étape, qui est facile. Étape 2 (qui prend vraiment du temps) : je vais additionner les multiples de la première ligne à chacune des autres lignes de telle sorte que toutes les composantes en dessous du pivot de la première ligne soient nulles. Donc additionner les multiples de la première ligne à chacune des autres lignes pour obtenir des composantes nulles en dessous du pivot de la première ligne. Je l'illustrerai après avec un exemple. L'étape 3 : on ignore la première ligne de la matrice et la colonne qui contient le pivot de la première ligne avec toutes les éventuelles colonnes encore à gauche et on refait étapes 1 et 2 avec la matrice restante. On répète les étapes 1 et 2 pour la matrice obtenue en ignorant la première ligne de la matrice et la colonne contenant le pivot (et toutes les colonnes à gauche de celle-là). Ça sera clair avec l'exemple que je vais faire maintenant.

Notes

Summary

2m 30s

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 10 & 10 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ & & & & \\ -1 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 10 & 10 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Voilà, je commence avec cette matrice A puis j'aimerais effectuer des opérations élémentaires sur la ligne pour la transformer en une matrice échelonnée et ensuite, on ira jusqu'à une forme échelonnée réduite. Donc la première étape c'était échanger les lignes pour avoir un pivot dans la première ligne, mais maintenant je n'ai pas besoin de faire ça parce que j'ai déjà un coefficient non nul là, et puis il n'y a pas de coefficient à gauche dans la matrice, car je suis dans la première colonne, donc je peux laisser comme ça.

Notes

Summary

4m 32s

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 10 & 10 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2' = -2L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 10 & 10 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc je vais prendre ça comme pivot, donc maintenant je suis censée éliminer tous les coefficients non nuls en dessous du pivot. Je vais faire ça étape par étape et là je vais utiliser les opérations de type III, où j'additionne des multiples de la première ligne aux autres lignes pour éliminer ce qu'il y a en dessous, donc ici je dois éliminer le *2* dela deuxième ligne, ici je vais remplacer la deuxième ligne, j'aurai donc une nouvelle deuxième ligne, qui sera : $L'_2 = (-2) \cdot L_1 + L_2$, Comme on l'a vu dans l'autre vidéo. [voir écran] Maintenant je dois aussi faire une opération élémentaire pour éliminer le *-1* de la troisième ligne, donc je suis censée additionner un multiple de la première ligne à la troisième ligne.

Notes

Summary

5m 01s

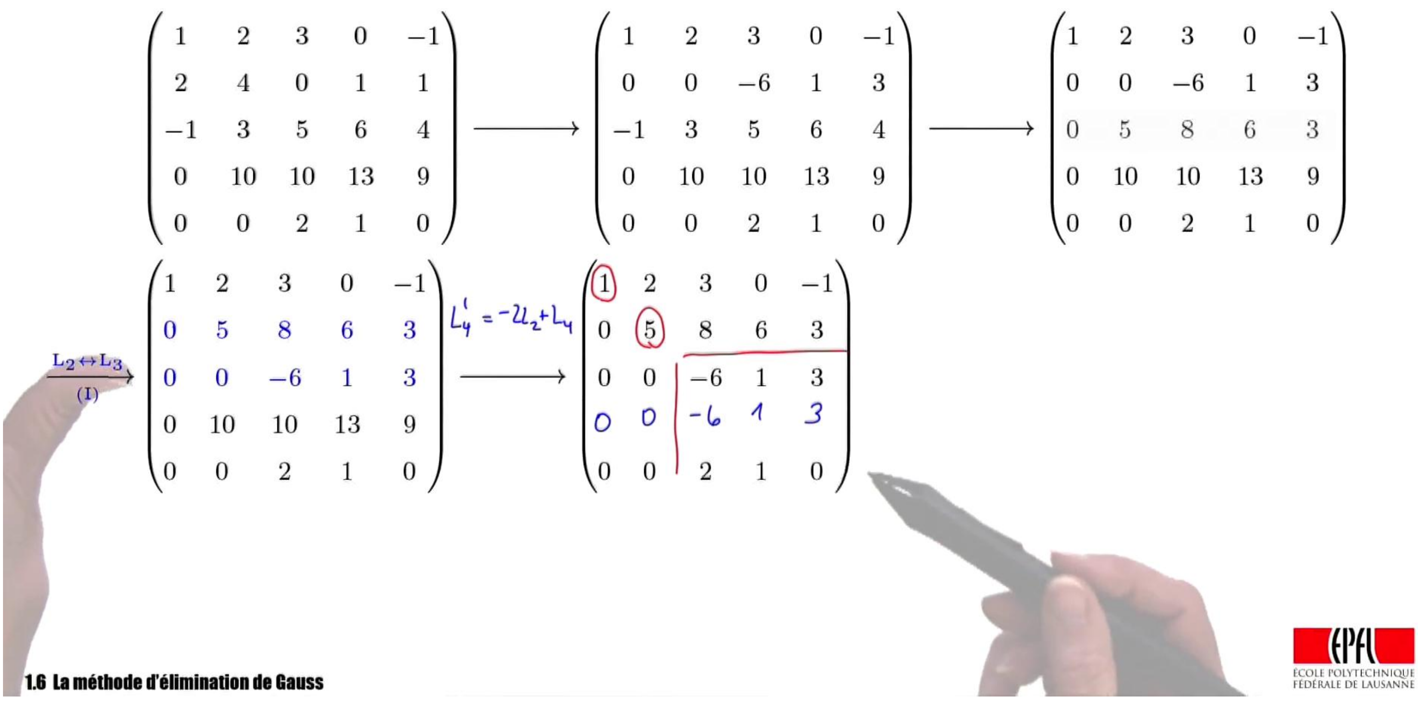
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 10 & 10 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(III)}]{L_2' = -2L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 10 & 10 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3' = L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 10 & 10 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette fois je n'ai besoin que d'ajouter la première à éa troisième ligne. La nouvelle ligne 3 sera : $L'_3 = L_1 + L_3$ Ce qui donne comme nouvelle ligne [voir écran] Maintenant, j'ai complété les étapes 1 et 2 parce que j'ai le pivot qui est là et effectivement, j'ai pleins de zéros en dessous et rien de non-nul, donc j'ai fini les étapes 1 et 2 et puis ignorant la première ligne, je vais me concentrer maintenant sur la sous-matrice [voir écran] Par contre, quand je ferai des opérations je le ferai sur toute la ligne, mais je les fais en fonction de cette sous-matrice. Maintenant étape 1 pour cette matrice : faire de telle sorte que j'aie un pivot dans la première ligne. et puis vous voyez ici que cette fois je n'ai pas un pivot à la place du *-6* car le *5* de la ligne du dessous, est plus à gauche. Donc le *-6* ne peut pas être un pivot. Il faut donc que j'effectur un échange de lignes dans la matrice pour avoir un pivot non nul qui soit le plus à gauche possible. Donc j'échange maintenant les lignes 2 et 3.

Notes

Summary

6m 08s



J'aurai donc : [voir écran] Maintenant on a le pivot qu'on avait là (le *1*), et on a un nouveau pivot ici (le *5*) Je dois maintenant éliminer tout ce qui est en dessous du pivot, donc je dois ajouter des multiples de la deuxième ligne à des lignes situées en dessous. Comme j'ai pleins de *0*, il faut juste éliminer le *10*, c'est ce que je vais faire. Donc c'est uniquement la quatrième ligne qui va changer, le reste est pareil. Ici je vais donc faire l'opération élémentaire $L'_4 = (-2)\cdot L_2 + L_4$, j'obtiens donc [voir écran] Donc ça, c'est la matrice que l'on obtiens. Comme j'ai un premier pivot (le *1*) et que j'ai complété l'étape 2 pour le deuxième pivot, j'ai fini avec ce deuxième pivot : J'ai tous les coefficients en dessous qui sont égaux à zéro. Maintenant je dois répéter étapes 1 et 2 avec cette sous-matrice (encadrée en rouge). Cette fois on voit que j'ai déjà un pivot ici (le premier *-6*, c'est à dire un élément qui est plus à droite là, je n'ai donc pas besoin d'échanger de lignes.

Notes

Summary

7m 33s

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 10 & 10 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 10 & 10 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 10 & 10 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & 10 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\text{(I)}]{L_4 \leftrightarrow L_5}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Par contre, ce que je dois faire, c'est de l'éliminer en dessous. Je vais donc d'abord éliminer le *-6* de la quatrième ligne. Je dis que la nouvelle ligne 4 c'est : $L'_4 = (-1)\cdot L_3 + L_4$. J'obtiens donc [voir écran] Maintenant, ce que je dois faire ici c'est d'éliminer le *2*, mais comme je sais que dans une matrice échelonnée, de toute façon je mets les lignes nulles en bas, je vais tout de suite faire ça. Donc j'échange les deux dernières lignes Je vais échanger L_4 et L_5, j'obtiens donc [voir écran]. Ça ne fait pas partie exactement des étapes I, II et II comme je l'ai dit, mais comme je sais que j'aimerais avoir ça en bas, je le fais déjà. Maintenant il me reste à éliminer le *2* de la quatrième ligne, et cette fois, je vais le faire un petit peu différemment. Donc voilà ce que l'on vient de faire. Il faut qu'on élimine ce 2. Si je fais seulement l'étape 3, je dois multiplier ça par quelque chose que j'additionne ici, et ça serait multiplié par *1/3* que j'additionne ici. Je pourrais le faire, mais là je vais montrer qu'on peut éviter les fractions (attention, ce n'est pas vrai en général). Je vais faire deux étapes à la fois, une combinaison des étapes 2 et 3.

Notes

Summary

9m 21s

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 10 & 10 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 10 & 10 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 10 & 10 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & 10 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow[\text{(II)},\text{(III)}]{L'_4 = L_3 + 3L_4}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

matrice échelonnée.

1.6 La méthode d'élimination de Gauss

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Ainsi, je peux imaginer que je multiplie la quatrième ligne par *3* et ensuite j'additionne la troisième ligne à cette ligne. Donc je le fais en deux étapes. Une opération de type II et une opération de type III combinées, donc la nouvelle ligne 4 va être : $L'_4 = 3 \cdot L_4 + L_3$. C'est deux opérations élémentaires à la fois j'ai remplacé ligne 4 par trois fois ligne 4 et ensuite j'additionne la ligne 3. j'obtiens [voir écran] Et voici la matrice que j'obtiens. Et comme vous le voyez elle a toutes les propriétés pour être une matrice échelonnée, un pivot, un pivot, un pivot, un pivot, ça va toujours plus à droite dans la matrice, en dessous de chaque pivot il y a des zéros, et puis il y a une ligne de zéros tout en bas de la matrice. Donc ça, c'est une matrice échelonnée. Par contre, ça n'est pas une matrice échelonnée réduite parce qu'on voit qu'il y a pleins de défauts, les pivots ne sont pas égaux à 1, dans la colonne des pivots, il y a d'autres coefficients qui sont non nuls, donc ça ne va pas. Je vais donc faire beaucoup d'étapes avec cette matrice, je vais la rendre jusqu'à une matrice échelonnée réduite. Mais là on peut apprécier le fait que la procédure pour rendre la matrice à une forme échelonnée, c'était pas trop pénible. Par contre, c'est un peu plus pénible de la rendre sous une forme échelonnée réduite.

Notes

Summary

10m 57s

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Voilà la forme de la matrice échelonnée. On a donc commencé avec une matrice, on a fait l'échelonnage, on arrive à cette matrice et maintenant nous allons continuer pour rendre cette matrice sous une forme échelonnée réduite. La première chose que je vais faire, c'est de diviser, ou multiplier les lignes par quelque chose d'approprié pour avoir les pivots qui valent tous *1*.

Notes

Summary

12m 51s

$$
\begin{array}{c}
\\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \\ \\
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\
0 & 5 & 8 & 6 & 3 \\
0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 8/5 & 6/5 & 3/5 \\
0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Je vais faire ça d'un seul coup. Je n'écris peut-être pas toutes les étapes ici, car ce que je vais faire est assez évident. Je vais donc multiplier la deuxième ligne par *1/5*. [voir écran] Et puis vous pouvez imaginer que ça va devenir pénible. Ici, la troisième ligne je vais la multiplier par *-1/6* [voir écran] Finalement, je multiplie la quatrième ligne par *1/4* [voir écran] Donc la première étape, c'est faire ce que je viens de faire-là.

Notes

Summary

13m 17s

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 8/5 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow[L'_3 = L_3 + \frac{1}{6} L_4]{L'_2 = L_2 - \frac{6}{5} L_4}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 8/5 & 0 & -3/10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow
\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

1.6 La méthode d'élimination de Gauss

Et maintenant, je dois éliminer les composantes non nulles dans la colonne où il y a un pivot. Vous pouvez imaginer que peut-être je commence ici et j'élimine le *2* de la première ligne et ensuite je commence à la troisième colonne et j'élimine ce qu'il y a au-dessus du *1*, mais en fait il est plus convenable de commencer par la dernière colonne, vous verrez pourquoi après. C'est que plus je mets des zéros à droite de la matrice, plus les autres étapes seront faciles. Donc la première chose, c'est que je m'occupe des deux composantes non nulles de la quatrième colonne. Ce sont des calculs un peu pénibles mais c'est comme ça. Ici, je dois éliminer le *-1/6*, je vais donc ajouter *1/6* fois la quatrième ligne à la troisième. J'écris ici ce que je fais, donc la nouvelle ligne 3 c'est : $L'_3 = L_3 + (1/6) \cdot L_4$, j'obtiens donc [voir écran] Maintenant je dois éliminer le *6/5*, donc je dis que la nouvelle deuxième ligne sera : $L'_2 = (-6/5) \cdot L_4 + L_2$ (Ça sera écrit plus proprement après) J'obtiens donc [voir écran] (Ce que l'on vient de faire est écrit plus clairement là) Donc maintenant, la quatrième colonne est bien rangée, j'ai un pivot et j'ai toutes les autres composantes de la colonne qui sont égales à zéro.

Notes

Summary

14m 04s

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 8/5 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 8/5 & 0 & -3/10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L'_1 = L_1 - 3L_3]{L'_2 = L_2 - \frac{8}{5}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Maintenant, je dois éliminer ce qui est en dessus du *1* de la troisième colonne. Je vais multiplier la troisième ligne par *-8/5* pour éliminer la composante *(2,3)*. La nouvelle ligne deux sera : $L'_2 = (-8/5)\cdot L_3 + L_2$ [voir écran] (Remarquez comme l'addition est facile dans la quatrième colonne) Maintenant, je dois éliminer le *3*. Donc je fais : $L'_1 = (-3)\cdot L_3 + L_1$ J'obtiens [voir écran] (L'étape précédente est décrite plus clairement) Enfin, que reste-t-il à faire dans cette matrice pour qu'elle soit échelonnée réduite ?

Notes

Summary

16m 29s

Dans la quatrième colonne, j'ai un pivot et que des zéros. Idèm dans la troisième colonne. Dans la deuxième colonne, j'ai un pivot et il reste un coefficient (le *2*), qu'il faut éliminer. Je vais donc remplacer remplacer : $L'_1 = (-2)\cdot L_2 + L_1$, et j'obtiens [voir écran] Remarquez que pour les colonnes trois et quatre, je n'additionne que des zéros. et c'est pour ça que je l'ai fait dans ce sens-là et finalement, j'obtiens [voir écran] La matrice que l'on obtient au final est très jolie : quatre pivots et puis c'est une matrice échelonnée réduite. Vous pouvez apprécier qu'il était bien plus pénible d'aller jusqu'à une forme échelonnée réduite plutôt que de simplement aller à une forme échelonnée, mais c'est ainsi.

Notes

Summary

18m 08s

Déf'n Soient A et B deux matrices $m \times n$. On dit que A et B sont lignes équivalentes si on peut transformer A en B par une suite d'opérations élémentaires de type I, II, III.

Maintenant je vais définir ce que sont deux matrices ayant la propriété que l'on peut transformer l'une en une autre en faisant ces opérations. Définition : Soient *A* et *B* deux matrices *m x n*. On dit que *A* et *B* sont lignes équivalentes si on peut transformer *A* en *B* par une suite d'opérations élémentaires de types I, II, III. Dans cette définition on dit qu'elles sont lignes équivalentes, je sous-entends donc que c'est une relation symétrique, par contre, je dis qu'on "peut transformer *A* en *B*". Donc vous pouvez vous demander si on peut transformer *B* en *A*, et oui on peut, car avec les opérations élémentaires, on peut toujours revenir en arrière. Donc si on multiplie une ligne par λ, après on peut re-multiplier par $1/\lambda$ et on revient à l'étape précédente. Si on échange des lignes, on peut le re-échanger et on revient. Si on additione λ fois une ligne à une autre après on peut revenir et additioner $-\lambda$ fois cette ligne à l'autre. Donc de toute façon, on peut aller dans les deux sens, c'est pour cela que ça a un sens de dire que *A* et *B* sont lignes équivalentes.

Notes

Summary

19m 21s

Déf'n Soient A et B deux matrices $m \times n$. On dit que A et B sont lignes équivalentes si on peut transformer A en B par une suite d'opérations élémentaires de type I, II, III.

Théorème ① Toute matrice A est ligne équivalente à une matrice échelonnée.

② Toute matrice A est ligne équivalente à une et une seule matrice échelonnée réduite.

Preuve ① l'algorithme de Gauss.

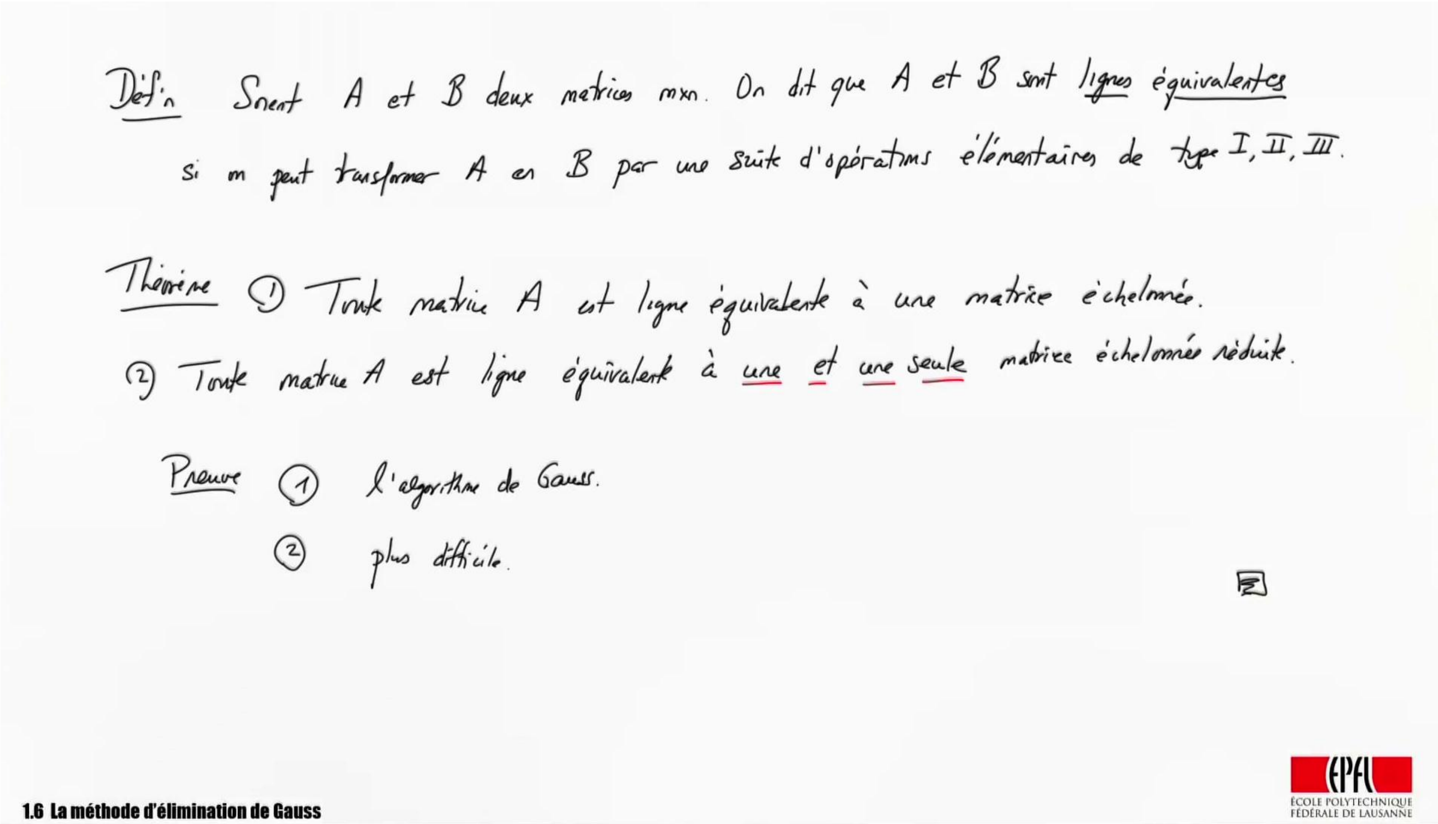
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Des fois on dit A est lignes équivalentes à B, ou que B est lignes équivalentes A : C'est la même chose. Maintenant, on a un théorème que l'on a essentiellement démontré dans la première partie, (ça on l'on montré) : Toute matrice A est lignes équivalentes à une matrice échelonnée. et puis la deuxième, moins évidente, que je ne vais malheureusement pas démontrer : Toute matrice A est lignes équivalentes à une et une seule, matrice échelonnée réduite. Ce qui est important dans le deuxième énoncé le "une et une seule". Pour la preuve de ce théorème, la première partie c'est essentiellement l'algorithme que nous venons de voir. Pour réduire une matrice à une matrice échelonnée, c'est l'algorithme de Gauss. On a vu que si on commence avec une matrice, au fur et à mesure on peut la transformer avec les opérations élémentaires en une matrice échelonnée. D'ailleurs on a vu qu'on peut la transformer en une matrice échelonnée réduite mais ce qui n'est pas du tout évident, c'est que la forme échelonnée réduite elle est unique.

Notes

Summary

21m 00s



Donc ça n'est pas vrai pour la forme échelonnée, si vous vous faites une suite d'opérations élémentaires sur la matrice et moi je fais une autre suite d'opérations élémentaires, on arrive à des matrices qui sont lignes équivalentes mais, qu'échelonnée, vous n'aurez pas forcément la même que moi, par contre, si on va jusqu'à la forme échelonnée réduite, on aura exactement la même matrice et ça c'est assez étonnant. Malheureusement, je n'ai pas le temps ici de démontrer ça. C'est une démonstration plus difficile. On va donc l'admettre : la forme échelonnée réduite est unique.

Notes

Summary

22m 32s