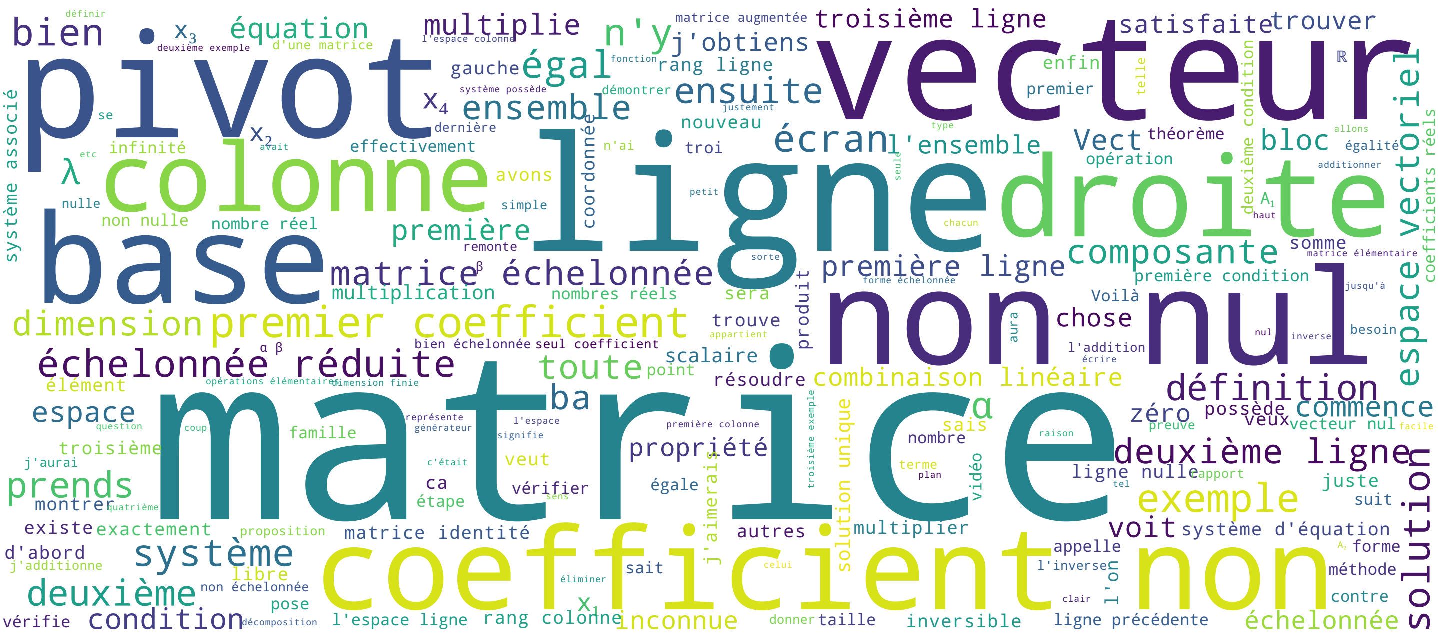
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 1 : Systèmes d'équations linéaires et matrices

1.5 Matrices échelonnées et matrices échelonnées réduites

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

Dans les vidéos précédentes, nous avons introduit ce que sont les matrices associées à un système d'équations et nous avons vu ce que deviennent nos opérations élémentaires au niveau matriciel. Par contre, nous n'avons jamais dit vers quelle sorte de matrice on veut aller, et c'est ici que je vous montre les matrices, que j'appelle les matrices échelonnées, ou bien échelonnées réduites, dont le système associé est particulièrement facile à résoudre. Et donc on saura quelle sorte de matrices on vise.

Notes

Summary

0m 03s

Définition Soit A une matrice $m \times n$. On dit que A est échelonnée si toutes les conditions suivantes sont satisfaites:

- le premier coefficient non nul dans la ligne $i+1$ est à droite du premier coefficient non nul dans la ligne i, pour tout $i \geq 1$. On appelle ce coefficient un pivot de la matrice échelonnée.
- Toute ligne nulle n'est suivie que de lignes nulles.

Exemples
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Je commence avec la définition. Soit *A* une matrice *m x n*. On dit que *A* est échelonnée si toutes les conditions suivantes sont satisfaites, et là, il y a deux conditions. La première condition, c'est : le premier coefficient non nul dans la ligne *i + 1* est à droite du premier coefficient non nul dans la ligne *i*, et ce, pour tout *i ≥ 1* On appelle ce coefficient un pivot de la matrice échelonnée. Donc ça, c'est une condition. Et la deuxième condition, c'est que toute ligne nulle, donc ne possédant que des zéros, n'est suivie que de lignes nulles. Donc, si on a une ligne où il n'y a que des *0*, après, on n'a que des lignes avec des *0*, avec que des zéros. Ok, je souligne. Donc on dit qu'une matrice est échelonnée si on a ces deux conditions. Et puis, si on a une matrice qui est échelonnée et qu'on a justement ce premier coefficient non nul dans une ligne, on appelle ça un pivot de la matrice. Maintenant, donnons des exemples. Donc, je me donne maintenant une matrice : *(1 0 2 1) (0 2 3 4) (0 0 0 1) (0 0 0 0)*. Maintenant, je veux voir si cette matrice est échelonnée ou pas.

Notes

Summary

0m 39s

Définition Soit A une matrice $m \times n$. On dit que A est échelonnée si toutes les conditions suivantes sont satisfaites:

- le premier coefficient non nul dans la ligne $i+1$ est à droite du premier coefficient non nul dans la ligne i, pour tout $i \geq 1$. On appelle ce coefficient un pivot de la matrice échelonnée.
- Toute ligne nulle n'est suivie que de lignes nulles.

Exemples $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ échelonnée

Alors je vais repérer le premier coefficient non nul dans chaque ligne. Donc, ici, dans la première ligne, le premier coefficient non nul, c'est ce *1* qui est là. Là, je n'ai pas besoin de regarder s'il est plus à droite parce qu'il n'y a pas de ligne précédente. Dans la deuxième ligne, le premier coefficient non nul, c'est ce *2* là qui est effectivement plus à droite que le *1*. Et puis, dans la troisième ligne, le premier coefficient non nul, c'est ce *1* qui est là et qui est plus à droite que le *2* de la ligne précédente. Donc j'ai la première condition qui est satisfaite : le premier coefficient non nul dans chaque ligne est plus à droite que le premier coefficient non nul de la ligne précédente. Après, il y a, effectivement, dans cette matrice, une ligne qui est nulle, donc que des zéros, et elle tout en bas de la matrice, elle n'a pas de ligne qui suit. Donc la deuxième condition est aussi satisfaite. Donc ça, c'est aussi ok. Et donc, cette matrice, elle est échelonnée. Et les pivots de cette matrice sont justement les *1,2* et *1* qu'on voit dans ces lignes non nulles. Maintenant, deuxième exemple.

Notes

Summary

3m 08s

Définition Soit A une matrice $m \times n$. On dit que A est échelonnée si toutes les conditions suivantes sont satisfaites:

- le premier coefficient non nul dans la ligne $i+1$ est à droite du premier coefficient non nul dans la ligne i, pour tout $i \geq 1$. On appelle ce coefficient un pivot de la matrice échelonnée.
- Toute ligne nulle n'est suivie que de lignes nulles.

Exemples $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ échelonnée ; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ non échelonnée ; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ non échelonnée.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Je me donne une matrice : *(1 0 2 1) (0 0 0 0) (0 0 2 2) (0 0 0 3)*. Je pourrais demander si la première condition est satisfaite mais, je vois déjà que la deuxième condition n'est pas satisfaite parce que là, j'ai une ligne nulle mais, après cette ligne, il y a des lignes non nulles. Donc cette matrice, elle est non échelonnée. Et puis, un troisième exemple : *(1 0 2 1) (1 2 3 4) (0 0 1 2) (0 0 0 0)*. Maintenant, je vérifie les conditions. Le premier coefficient non nul dans la première ligne est ce *1* là, comme je l'ai dit avant, on n'a pas de condition à vérifier là parce qu'il n'y pas de ligne avant. Maintenant, je passe à la deuxième ligne. Et là, j'ai le premier coefficient non nul ici, mais qui n'est pas plus à droite que le premier coefficient non nul dans la ligne précédente donc, pour cette raison-là, elle est non échelonnée. Donc, une matrice échelonnée a cette propriété qu'elle va un peu en triangle, toujours plus à droite; et si jamais il y a des lignes nulles, ces lignes-là sont tout en bas de la matrice. Maintenant, on a une deuxième définition.

Notes

Summary

4m 22s

Définition Soit A une matrice $m \times n$. On dit que A est <u>échelonnée</u> si toutes les conditions suivantes sont satisfaites:

- le premier coefficient non nul dans la ligne $i+1$ est à droite du premier coefficient non nul dans la ligne i, pour tout $i \geq 1$. On appelle ce coefficient un <u>pivot</u> de la matrice échelonnée.
- Toute ligne nulle n'est suivie que de lignes nulles.

Exemples $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ échelonnée ; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ non échelonnée ; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ non échelonnée.

Définition Une matrice A est dite <u>échelonnée</u> <u>réduite</u> si elle est échelonnée et

- chaque pivot est égal à 1, et
- le seul coefficient non nul dans la colonne d'un pivot est le pivot même.

Exemples $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.5 Matrices échelonnées et matrices échelonnées réduites

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Une matrice *A* est dite échelonnée réduite si, d'abord, elle est échelonnée, et, en plus, on a encore deux conditions : chaque pivot est égal à *1*, et le seul coefficient non nul, dans la colonne d'un pivot, est le pivot lui-même. Voilà, ça c'est la définition: échelonnée réduite. Maintenant, on va voir des exemples. Alors, je me donne une matrice comme ça : *(1 0 2 0) (0 1 3 0) (0 0 0 1) (0 0 0 0)*. On se demande, déjà, est-ce qu'elle est échelonnée ? Alors, le premier coefficient non nul dans la deuxième ligne est plus à droite que dans la première ligne. Le premier coefficient non nul dans la troisième ligne est plus à droite que dans la deuxième ligne. Et puis, il y a une ligne nulle, qui est en bas de la matrice. Donc ça, c'est une matrice qui est échelonnée. On va repérer les pivots. Donc, les pivots sont ici. Maintenant on vérifie si on a ces deux conditions satisfaites. Donc, les pivots sont en effet égaux à *1* et je regarde dans la colonne de chaque pivot, et je vois que le seul coefficient non nul, dans la première, deuxième et quatrième colonnes, le seul coefficient non nul, c'est le pivot lui-même. Donc on a aussi la deuxième condition.

Notes

Summary

6m 07s

Définition Soit A une matrice $m \times n$. On dit que A est échelonnée si toutes les conditions suivantes sont satisfaites:

- le premier coefficient non nul dans la ligne $i+1$ est à droite du premier coefficient non nul dans la ligne i, pour tout $i \geq 1$. On appelle ce coefficient un pivot de la matrice échelonnée.
- Toute ligne nulle n'est suivie que de lignes nulles.

Exemples $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ échelonnée ; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ non échelonnée ; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ non échelonnée.

Définition Une matrice A est dite échelonnée réduite si elle est échelonnée et

- chaque pivot est égal à 1, et
- le seul coefficient non nul dans la colonne d'un pivot est le pivot même.

Exemples $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ échelonnée réduite ; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ échelonnée réduite ; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.5 Matrices échelonnées et matrices échelonnées réduites

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Cette matrice-là est donc échelonnée réduite. Deuxième exemple : *(1 1 0 0) (0 0 1 0) (0 0 0 1)*. De nouveau, est-ce que cette matrice est échelonnée ? Le premier coefficient non nul, ici, est à droite de celui-là. Le premier coefficient non nul dans la troisième ligne est à droite de celui-là. Il n'y a pas de ligne nulle, donc ce n'est pas un problème. Donc elle est échelonnée. Maintenant, est-ce qu'elle est échelonnée réduite ? Alors, je repère les pivots. Voilà un pivot, là, là et là. Ces pivots sont égaux à *1*. Et dans la colonne de chacun de ces pivots, il n'y a que le pivot qui est non nul, donc ça c'est très bien. Donc cette matrice-là, elle est échelonnée réduite. Enfin, un troisième exemple : *(1 2 0 0) (0 1 2 0) (0 0 0 1) (0 0 0 0)*. Comme avant, d'abord, on contrôle que la matrice est bien échelonnée. Alors, le premier coefficient non nul dans la deuxième ligne est plus à droite, dans la troisième ligne, encore plus à droite. Il y a une ligne nulle qui est tout en bas de la matrice. Cette matrice est échelonnée. Maintenant je vérifie les deux conditions, ici.

Notes

Summary

8m 16s

Résolution de système associé à une matrice échelonnée ou échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc, les pivots : on voit que, là, j'ai un pivot qui est un *1*, dans la deuxième ligne, c'est ce pivot-là, qui est un *1*, dans la troisième ligne, c'est un pivot qui est aussi égal à *1*. Donc ça, c'est ok. La première condition est satisfaite. Et puis maintenant, je regarde dans la colonne de chacun de ces pivots. Dans la première colonne, il n'y a que le pivot qui est non nul. Par contre, dans la deuxième colonne, il y a le pivot qui est non nul et un autre coefficient qui est non nul. Donc, à cause de ça, cette matrice est non échelonnée réduite.

Notes

Summary

10m 07s

Résolution de système associé à une matrice échelonnée ou échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le système associé

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -1 \\ 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_3 + x_4 &= 1 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

1.5 Matrices échelonnées et matrices échelonnées réduites

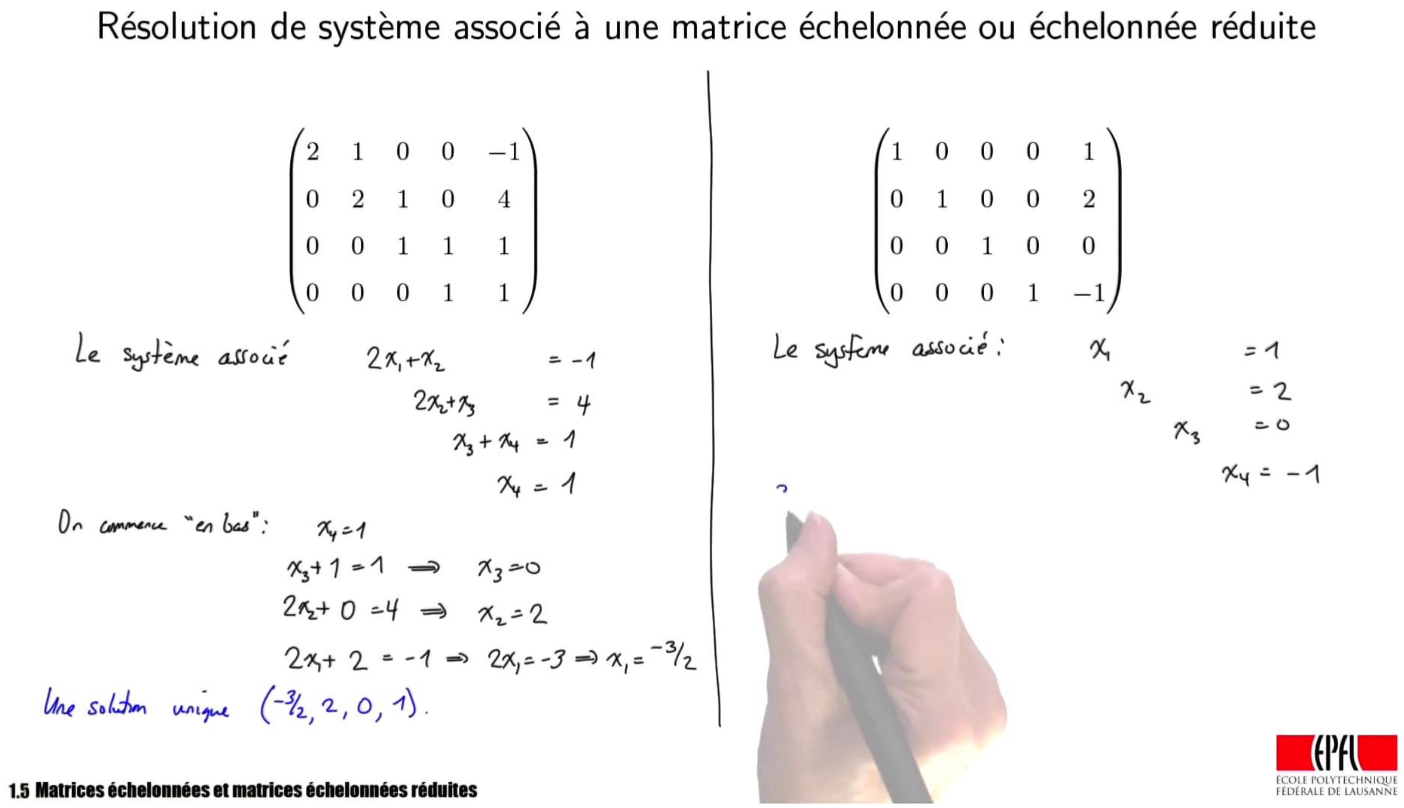
EPFL ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Et puis, j'aimerais vous montrer à quel point le fait d'avoir une matrice augmentée échelonnée, ou bien échelonnée réduite, simplifie la résolution du système associé. Donc j'imagine, ici, que j'ai deux matrices qui représentent un système d'équations, dans le sens où ça, c'est la matrice augmentée d'un système d'équations linéaires, et ça aussi. Donc on voit que dans les deux cas, il y a quatre inconnues parce que ça c'est la colonne des termes constants. Donc à chaque fois j'ai quatre équations, quatre inconnues. On va remettre les inconnues, et je vais résoudre le système. Ah, ici, on vérifie qu'effectivement c'est une matrice échelonnée parce qu'on va toujours plus à droite, ici c'est bien une matrice échelonnée réduite, parce que les pivots sont des *1* et, dans la colonne d'un pivot, il n'y a que des *0* et le pivot. On va faire les deux cas. Donc, je trace une ligne là, et on va faire les deux. Ici, je remets les inconnues, et le système associé est le système suivant : donc j'ai $2x_1 + x_2 = -1$, j'ai $2x_2 + x_3 = 4$, j'ai $x_3 + x_4 = 1$, et, enfin, $x_4 = 1$. Donc ça c'est le système associé à cette matrice.

Notes

Summary

10m 46s

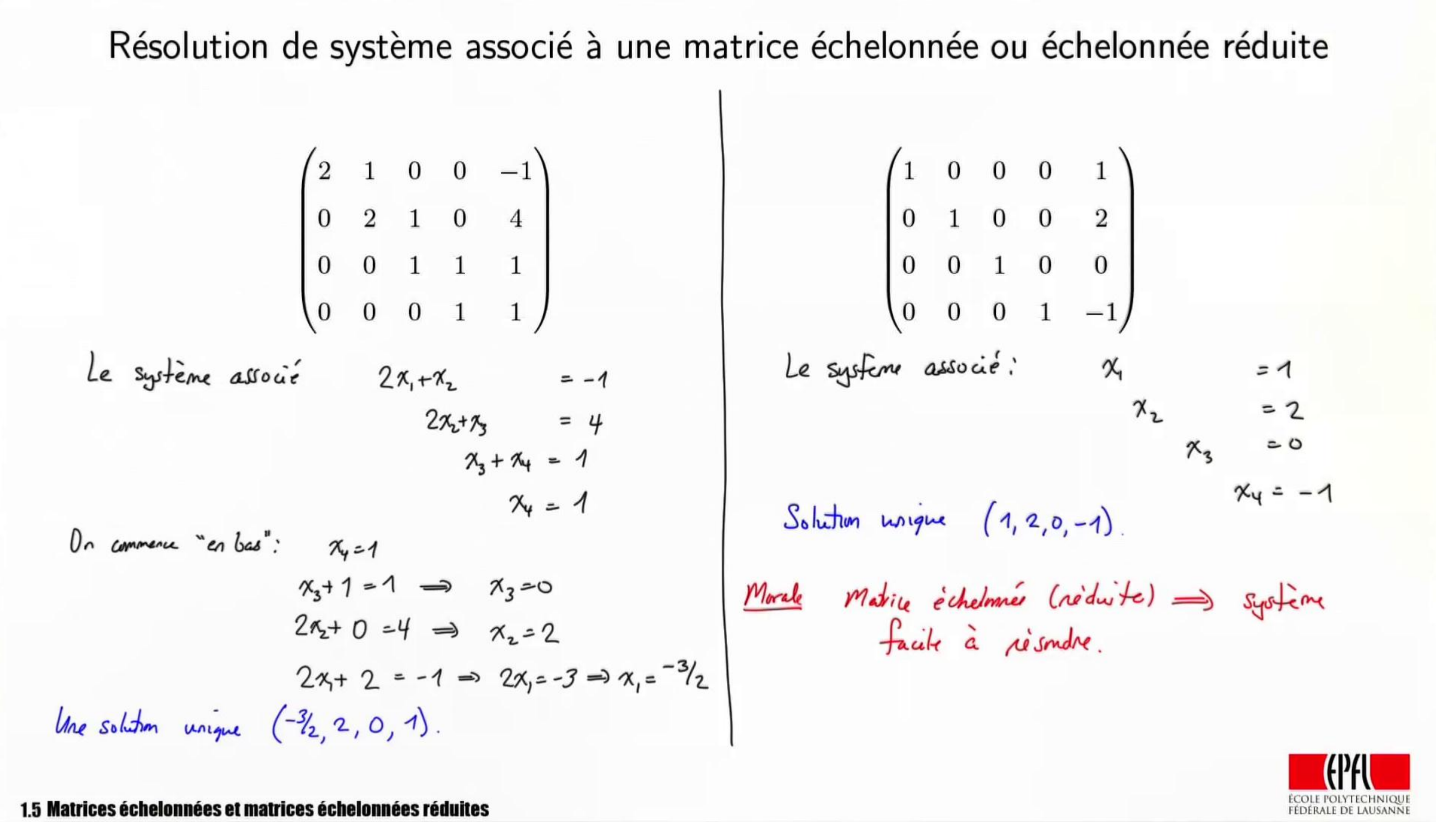


Maintenant je résous le système comme suit : Je vais commencer en bas, car c'est la dernière équation qui est la plus simple, il n'y a que l'inconnue x_4. Donc, je commence en bas, et on a $x_4 = 1$. Je remonte, la troisième équation me dit que $x_3 + x_4 = 1$, mais maintenant je sais que $x_4 = 1$, donc $x_3 + 1 = 1$, et donc $x_3 = 0$. Je remonte, la deuxième équation me dit $2x_2 + x_3 = 4$ x_3, c'est 0, et donc, $x_2 = 2$. Et puis, je remonte à la première équation donc j'ai $2x_1 + x_2 = -1$, et x_2 c'est 2, et donc, $2x_1 = -3$, et donc, $x_1 = -3/2$. Donc je trouve que le système possède une solution unique. Et, en plus, je l'ai trouvée. Donc une solution unique : x_1 c'est $-3/2$, x_2 c'est 2, x_3 c'est 0, et x_4 c'est 1. Maintenant, on fait la même chose avec le système qui est associé à cette matrice échelonnée réduite, mais c'est encore plus simple. Ici, le système associé est comme suit : j'ai $x_1=1$, j'ai $x_2=2$, j'ai $x_3=0$ et $x_4 = -1$. Donc j'ai déjà, sans rien faire, la solution immédiate. Donc, là, il y a de nouveau une solution unique qui est $(1, 2, 0, -1)$.

Notes

Summary

12m 24s



En fait, la morale de l'histoire, c'est que matrice échelonnée ou échelonnée réduite, d'ailleurs encore plus échelonnée réduite, implique système facile à résoudre. Vous aurez certainement remarqué qu'ici, je vous donne, les deux fois, un système dont il y a une solution unique et vous vous demandez certainement comment se présente la matrice associée à un système où il n'y a pas de solution, ou bien où il y a une infinité de solutions, mais ça, on va le voir dans les vidéos qui suivent.

Notes

Summary

14m 36s