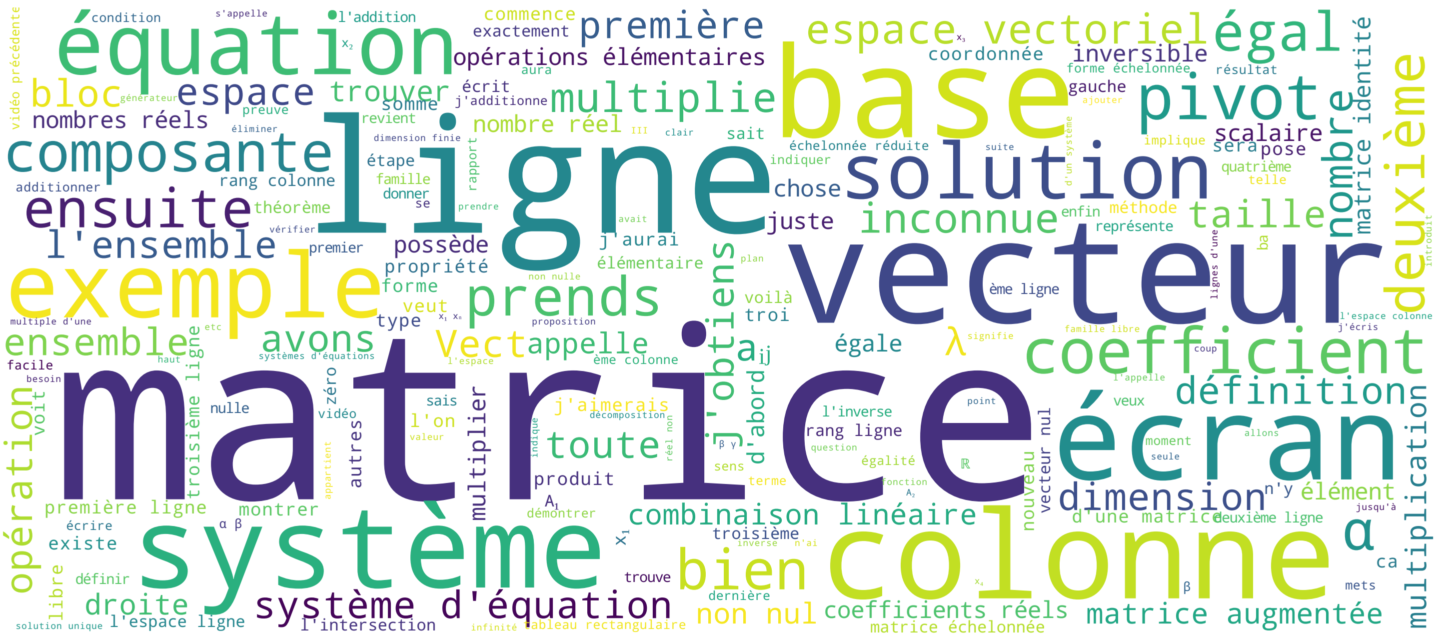
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 1 : Systèmes d'équations linéaires et matrices

1.4 Opérations élémentaires : version matricielle

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

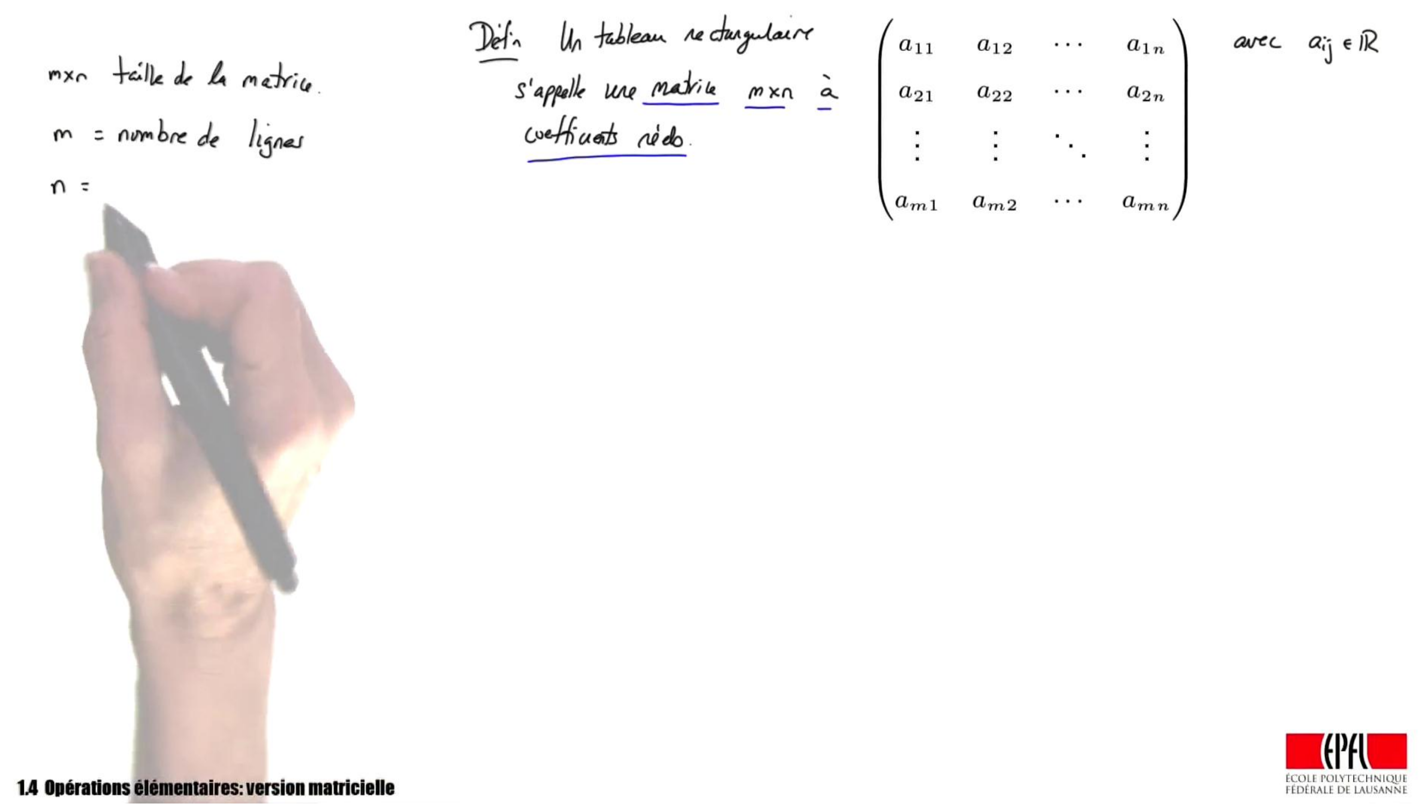
EPFL

Dans la vidéo précédente, j'ai introduit ce que j'appelais les opérations élémentaires sur les équations d'un système (équations linéaires). Maintenant, j'aimerais revoir ces opérations élémentaires, mais dans une version matricielle. Cela va simplifier l'écriture, ça ne change rien à la théorie. Mais pour ça je dois d'abord vous dire ce que c'est une matrice.

Notes

Summary

0m 04s



Donc voilà, une matrice, c'est un tableau comme ceci [voir écran] Donc définition : Un tableau rectangulaire de la forme [voir écran] avec pour éléments a_{ij} des nombres réels s'appelle une matrice *m x n* (lire "m fois n"). Le nombre *m* indique qu'il y a *m* lignes et le nombre *n* indique qu'il y a *n* colonnes. On dit que la matrice est "à coefficients réels". Donc : un tableau rectangulaire, avec des valeurs qui sont des nombres réels s'appelle une matrice *m x n* à coefficients réels. (Retenir cette terminologie : "matrice *m x n* à coefficient réel") (Retenir cette terminologie : "matrice *m x n* à coefficient réel") Maintenant, quand nous avons une matrice *m x n* à coefficients réels, il y a plusieurs paramètres qui interviennent. On appelle *m x n* la taille de la matrice. On appelle *m x n* la taille de la matrice. On appelle toujours *m* le nombre de lignes. (Se rappeler : "m = nombre de lignes") On appelle toujours *n* le nombre de colonnes. (Se rappeler : "n = nombre de colonnes") L'élément a_{ij} est le coefficient qui se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Notes

Summary

0m 27s

$m \times n$ taille de la matrice.

m = nombre de lignes

n = nombre de colonnes.

Défin ① Un tableau rectangulaire s'appelle une matrice $m \times n$ à coefficients réels.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{avec } a_{ij} \in \mathbb{R}$$

a_{ij} = coefficient à l'intersection de la i-ème ligne et la j-ème colonne s'appelle la composante (i,j).

On écrit $A = (a_{ij})$.

② Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices. On dit que A est égale à B, on écrit $A = B \Longleftrightarrow$ A et B sont de même taille et pour tout i,j, $a_{ij} = b_{ij}$.

On note toujours : a_{ij} = coefficient à l'intersection de la i-ème ligne et la j-ème colonne et on l'appelle le coefficient ou bien la composante *(i,j)* de la matrice. Souvent on nomme les matrices avec les lettres majuscules donc ici on a la matrice *A*, on écrit $A = (a_{ij})$ pour indiquer que la matrice *A* possède pour coefficients les petites lettres a_{ij} (minuscules) Ceci est la première partie de la définition. Deuxième partie : il faut définir ce qu'on entend quand on dit qu'une matrice est égale à une autre matrice. Donc, soit *A* et *B*, deux matrices, la matrice *A* avec des coefficients (a_{ij}),, la matrice *B* avec des coefficients (b_{ij}). On dit que *A* est égale à *B*, et on écrit $A = B$ si et seulement si elles ont la même taille (*A* et *B* sont de même taille) et, que pour tout *i,j* la composante *(i,j)* de la matrice A est égale à la composante *(i,j)* de la matrice B. En fait, c'est la seule définition qui a un sens. Maintenant, j'aimerais revenir à nos systèmes d'équations. Ce qu'on vient de faire est abstrait : on a introduit ce qu'est une matrice, c'est un tableau rectangulaire de nombres réels.

Notes

Summary

2m 14s

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = 1 \\ 2x_1 & & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ & \frac{1}{2}x_2 & +x_3 & & = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

1.4 Opérations élémentaires: version matricielle

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Ce qui nous intéresse (pour le moment), ce sont les systèmes d'équations. Je pose un système d'équations et je vais lui associer deux matrices. Soit donc un système d'équations, avec, comme nous avons vu plusieurs fois, les inconnues sont $x_1,\ldots, x_n$, on prend un système à m équations. A ce système à m équations, aux inconnues $x_1,\ldots, x_n$, on associe deux matrices. La première matrice est la matrice des coefficients, c'est la matrice où je ne mets que le côté gauche du système. [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] On appelle cette matrice la matrice des coefficients du système. On associe aussi une autre matrice qui s'appelle la matrice augmentée du système, appelons la B Ça s'appelle la matrice augmentée parce qu'on va prendre la matrice des coefficients à laquelle on ajoute une colonne (la colonne des termes constants). [voir écran] Cette matrice B est la matrice augmentée du système. Maintenant, on aimerait revoir nos opérations élémentaires, mais plutôt en travaillant avec la matrice augmentée, pas juste en travaillant avec les équations.

Notes

Summary

4m 18s

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = 1 \\ 2x_1 & & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ & \frac{1}{2}x_2 & +x_3 & & = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Type I : Echanger ligne 1 et ligne 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Type II :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

1.4 Opérations élémentaires: version matricielle

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Soit donc un système d'équations : un tout petit système (4 inconnues, 3 équations), et puis j'écris la matrice augmentée du système. Donc ici on a trois fois la même matrice, c'est la matrice augmentée du système d'équations. Et puis maintenant je vais effectuer les opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice plutôt que sur les équations du système. Ça revient à la même chose. Donc, type I : on échangeait deux équations du système donc au lieu d'échanger les équations, je vais échanger les lignes. Échanger... Voici un exemple : j'échange la ligne 1 et la ligne 2 Donc ici je vais indiquer sur la flèche ce que je fais comme opération(s). Donc j'inverse la ligne 1 (L_1), avec la ligne 2 (L_2). La matrice qui résulte de c'est opération, c'est : [voir écran] Pour le Type II : c'était l'opération élémentaire où on multiplie une équation du système par un nombre réel non-nul. Donc par exemple, je peux chasser les dénominateurs dans cette équation, donc ça revient à multiplier une ligne de la matrice par un nombre réel non-nul. Par exemple ici, je multiplie la troisième ligne par *4*.

Notes

Summary

7m 04s

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & =1 \\ 2x_1 & & +x_3 & -x_4 & =0 \\ & \frac{1}{2}x_2 & +x_3 & & =\frac{1}{4} \end{cases}$$

Type I : Echanger ligne 1 et ligne 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Type II : Multiplier 3e ligne par 4

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3' = 4 \cdot L_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Type III : Rajouter $(-2)\times$ ligne 1 à ligne 2.

$$\begin{array}{c} -2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2' = -2 \cdot L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Opérations élémentaires

1.4 Opérations élémentaires: version matricielle

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc ici, je vais écrire que la nouvelle troisième ligne, que je l'appelle L_3', et j'aurai $L_3'=4\cdot L_3$. Donc la matrice que j'obtiens est [voir écran] Finalement le Type III : on ajoutait un multiple d'une équation à une autre, donc par exemple, je peux ajouter -2 fois la première équation à la deuxième et ça élimine x_1 dans la deuxième équation. Dans le cas des matrices, cela revient à ajouter un multiple d'une ligne de la matrice à une autre ligne. Donc dans notre exemple, on ajoute -2 fois la ligne 1 à la ligne 2. Donc ici, de nouveau je vais indiquer ce que je fais. On fait $L_2' = (-2)\cdot L_1 + L_2$. *Donc la matrice que j'obtiens est [voir écran] Le résultat de ces opérations est à chaque fois une matrice qui représente un système d'équations, je je peux remettre les inconnues. Et si je remets les inconnues, alors j'aurai un système d'équations dont l'ensemble des solutions est le même que l'ensemble des solutions du système original. C'est ce qu'on a montré dans la vidéo précédente. Ces opérations de type I, II et III, qu'on effectue sur les lignes d'une matrice, on va aussi les appeler "les opérations élémentaires", que l'on effectue cette fois sur les lignes d'une matrice plutôt que sur les équations d'un système.*

Notes

Summary

8m 52s