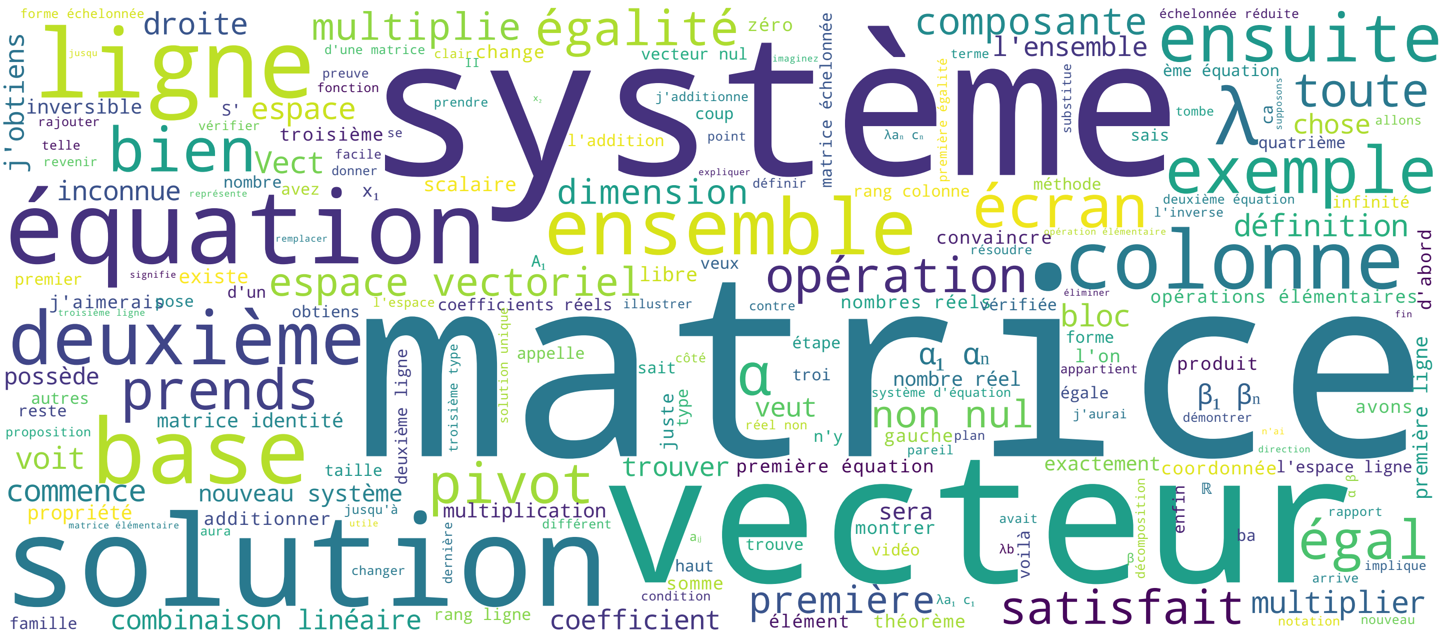
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 1 : Systèmes d'équations linéaires et matrices

1.3 Méthodes de résolution, opérations élémentaires

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

1.3 MÉTHODES DE RÉSOLUTION, OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES Nous venons de voir un théorème qui nous dit qu'un système d'équations linéaires à *n* inconnues, à coefficients réels possède ou bien une solution unique, ou bien aucune solution, ou bien une infinité de solutions. Mais ce qui nous intéresse, c'est d'avoir une méthode efficace pour résoudre de tels systèmes d'équations, et c'est ce que je commence à présenter dans cette vidéo.

Notes

Summary

0m 00s

$$
S\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\
\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\
\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

I. On permute deux équations du système. On obtient un nouveau système.

$$
S' \begin{cases}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\vdots \\
a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\
\vdots \\
a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

Donc voilà notre système d'équations aux inconnus x_1 jusqu'à x_n, les coefficients a_{ij} sont des nombres réels et les b_i aussi. Et puis j'introduis des opérations sur les équations du système, que je vais appeler les opérations élémentaires. Donc d'abord le premier type d'opération, c'est que je vais tout simplement permuter deux équations du système. Donc, je fais ça ici dans cet exemple, je vais permuter les équations i et j. J'obtiens donc un nouveau système. C'est le système S. Et j'obtiens un nouveau système que j'appelle S', qui a la tête suivant. La première équation, c'est pareil. Ça n'a pas changé. Ensuite quand j'arrive à la i-ème équation, je vais la remplacer par la j-ème équation. Ici j'ai donc $a_{j1}x_1 + \ldots a_{jn}x_n = b_j$. Ensuite, quand j'arrive à la j-ème place, je vais mettre la i-ème équation, donc $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = bi$ et ensuite, je ne change pas les autres équations du système. Donc maintenant, imaginez qu'on a une solution de ce système, donc $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ qui satisfait à toutes les égalités.

Notes

Summary

0m 29s

$$
S \left\{
\begin{array}{llllll}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & + & \cdots & +a_{in}x_n & = b_i \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{j1}x_1 & +a_{j2}x_2 & + & \cdots & +a_{jn}x_n & = b_j \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & = b_m
\end{array}
\right.
$$

I. On permute deux équations du système. On obtient un nouveau système.

$$
S' \left\{
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\vdots \\
a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\
\vdots \\
a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
\right.
$$

S' possède le même ensemble de solutions que le système S.

II. On multiplie une équation du système par un nombre réel non nul, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

$$
S'' \quad
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\vdots \\
\lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \dots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

1.3 Méthodes de résolution, opérations élémentaires

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Alors comme l'ensemble des équations ici, c'est exactement le même ensemble que celui de équations ici, on voit que le $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ satisfait à toutes ces équations du système S'. Et aussi, si j'ai un $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ qui satisfait S', alors satisfait S. Donc S et S' ont exactement le même ensemble de solutions. S' possède le même ensemble de solutions que le système S. Maintenant, le deuxième type d'opérations, c'est que je vais multiplier toute une équation, c'est-à-dire multiplier tous les coefficients de l'équation par un nombre réel non nul. On multiplie une équation du système par un nombre réel non nul. Donc λ dans R différent de zéro. Donc cette fois, le nouveau système, appelons-le S'' (double prime). Disons que je multiplie cette équation-là par λ. Donc la première équation ne change pas et les équations ne changent pas jusqu'à la i-ème équation, et là, j'ai λ<$a_{i1}x_1+\dots\ \lambda a_{i2}x_2+\dots+\lambda a_{in}x_n=\lambda b_i$. Et ensuite les autres équations du système, je ne les change pas. Donc la dernière équation c'est pareil que là-haut. Maintenant, imaginez que vous avez une solution du système S, $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, qui satisfait à toutes les équations.

Notes

Summary

2m 27s

$$
S\left\{\begin{array}{llllll}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & + & \cdots & +a_{in}x_n & =b_i \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{j1}x_1 & +a_{j2}x_2 & + & \cdots & +a_{jn}x_n & =b_j \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & =b_m
\end{array}\right.
$$

I. On permute deux équations du système. On obtient un nouveau système.

$$
S' \left\{\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\vdots \\
a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\
a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}\right.
$$

S' possède le même ensemble de solutions que le système S.

II. On multiplie une équation du système par un nombre réel non nul, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

$$
S'' : \begin{array}{l}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\vdots \\
\lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \cdots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

S et S'' ont le même ensemble de solutions.

1.3 Méthodes de résolution, opérations élémentaires

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Alors, est-ce que ça satisfait aussi à cette équation-là c'est la seule équation qui a changé évidemment, parce que quand vous substituez $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ ici, vous avez une égalité, et quand vous multipliez cette égalité par λ vous avez cette égalité. Maintenant, supposons que l'on a $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ qui satisfait à S'', alors est-ce qu'on peut revenir ici à S? Et c'est pour ça que j'ai choisi λ non nul, parce que si j'ai $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ qui satisfait à ça, je peux diviser par λ, car il est non nul, et je reviens à une égalité ici, aussi avec les β_i. Donc S et S'' ont le même ensemble de solutions. Donc maintenant, je vais expliquer le troisième type d'opération élémentaire, qui est l'opération la plus utile.

Notes

Summary

4m 31s

Système S : $\begin{cases} a_1x_1 & + & \cdots & +a_nx_n & = b \\ c_1x_1 & + & \cdots & +c_nx_n & = d \end{cases}$

III. On rajoute à une équation un multiple d'une autre équation.

on rajoute $\lambda \cdot$(équation i) à l'équation j.

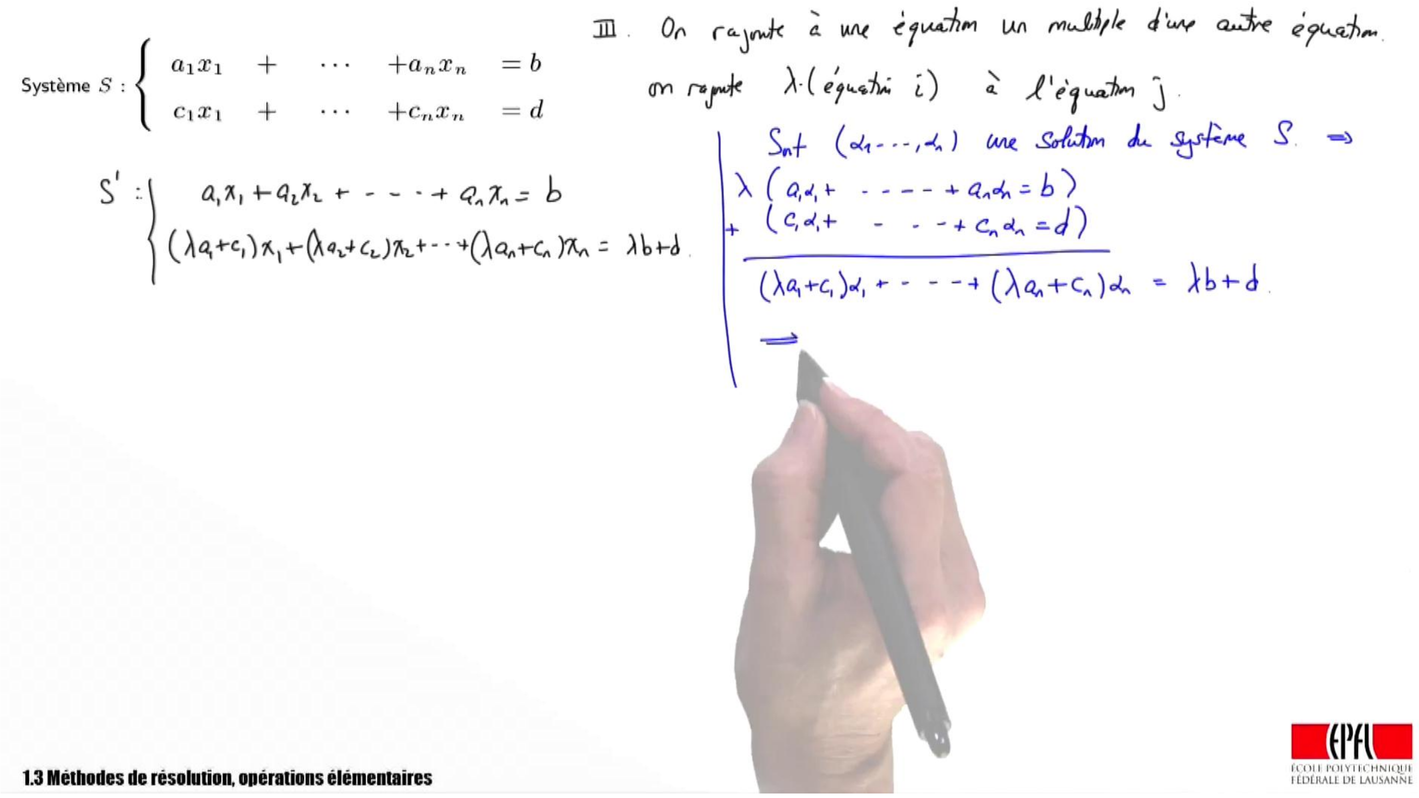
$$S' : \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \\ (\lambda a_1 + c_1)x_1 + (\lambda a_2 + c_2)x_2 + \cdots + (\lambda a_n + c_n)x_n = \lambda b + d. \end{cases}$$

Comme cette opération va travailler sur deux équations du système, je vais prendre un petit système avec seulement deux opérations, juste pour simplifier la notation, comme ça j'ai moins d'indices. Donc je vais vous expliquer avec un petit système. Donc troisième type, c'est que l'on ajoute à une équation un multiple d'une autre. Donc par exemple si ça, c'était l'équation i et ça l'équation j on ajoute λ fois l'équation i à l'équation j. Je vais illustrer ça ici. Je vais fabriquer un nouveau système que j'appelle S' et la première équation du système est la même puisque je vais changer la deuxième. La première c'est $a_1x_1+a_2x_2+ \ldots a_nx_n=b$. Par contre, la deuxième équation du système va changer. C'est là où je vais multiplier la première équation par λ et rajouter à la deuxième, donc j'aurai $(\lambda a_1+c_1)x_1+\ldots (\lambda a_2+c_2)x_2+\ldots+(\lambda a_n+c_n)x_n=\ldots \lambda b+d$. Donc ça, c'est le nouveau système S'. Et maintenant, j'aimerais vous convaincre que S et S' ont exactement le même ensemble de solutions.

Notes

Summary

5m 28s

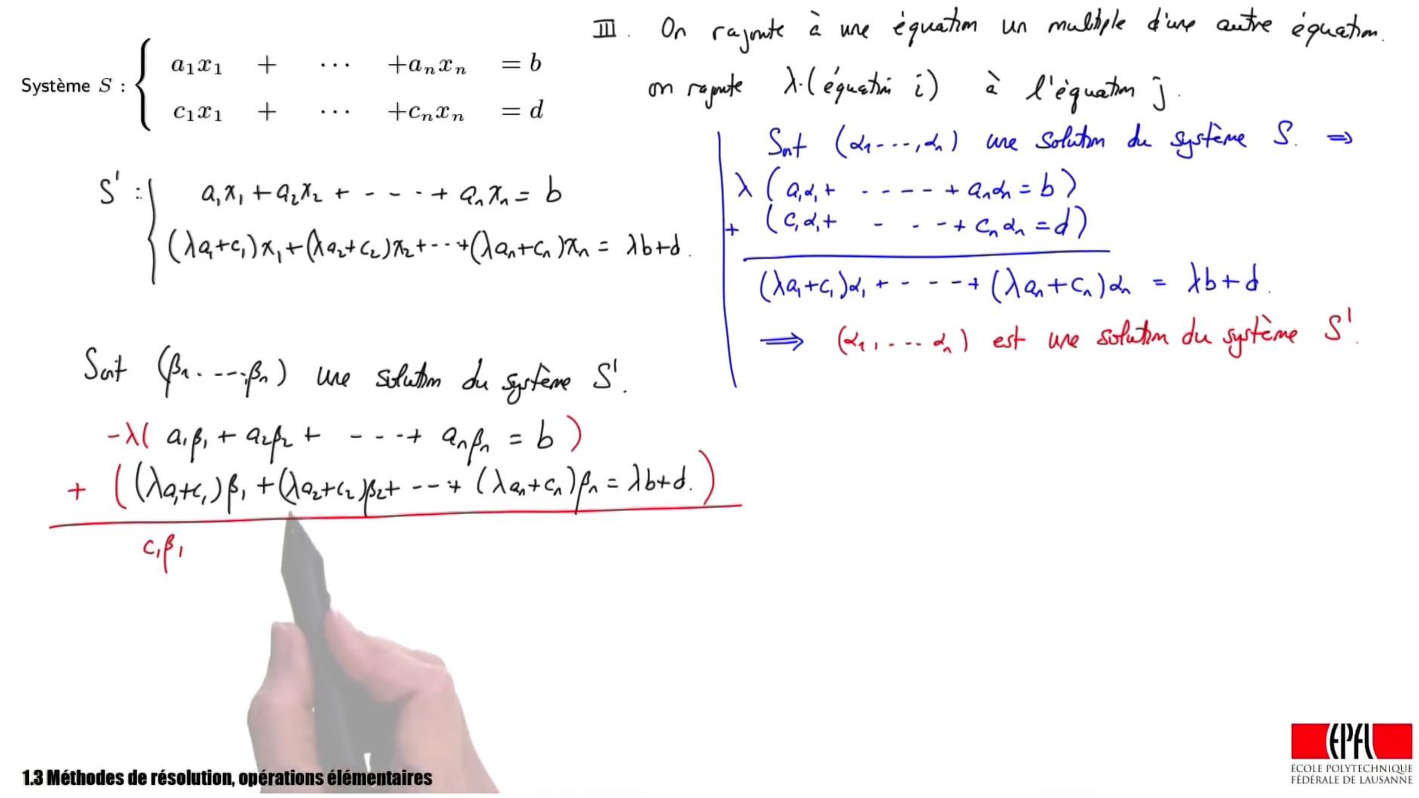


Je dois faire dans deux directions, d'abord je prends une solution ici en S, je dois vous convaincre que c'est une solution de S', et ensuite je prends une solution de S' et je vous convaincs que c'est une solution de S. Donc je commence; soit $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, une solution du système S. Ça veut dire que quand je substitue α_i à la place de x_i dans les deux équations, les égalités sont vérifiées, donc on a : $a_1\alpha_1+\ldots+a_n\alpha_n = b$, et on a $c_1\alpha_1+\ldots+c_n\alpha_n = d$. Et maintenant, j'aimerais voir que j'ai une solution aussi du système S' On voit déjà que la première égalité du système S' est vérifiée par les α et puis maintenant, il faut voir que la deuxième est aussi vérifiée. Ce que l'on va faire, c'est que je vais simplement multiplier cette équation-là par λ et je vais additionner à la deuxième, et j'obtiens une égalité qui sera $(\lambda a_1+c_1)\alpha_1+\ldots,\ +(\lambda a_n+c_n)\alpha_n=\ldots\ \lambda b + d$. Donc du coup on voit que le $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ satisfait à la deuxième équation du système S'. Donc $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ est une solution du système S'.

Notes

Summary

7m 24s

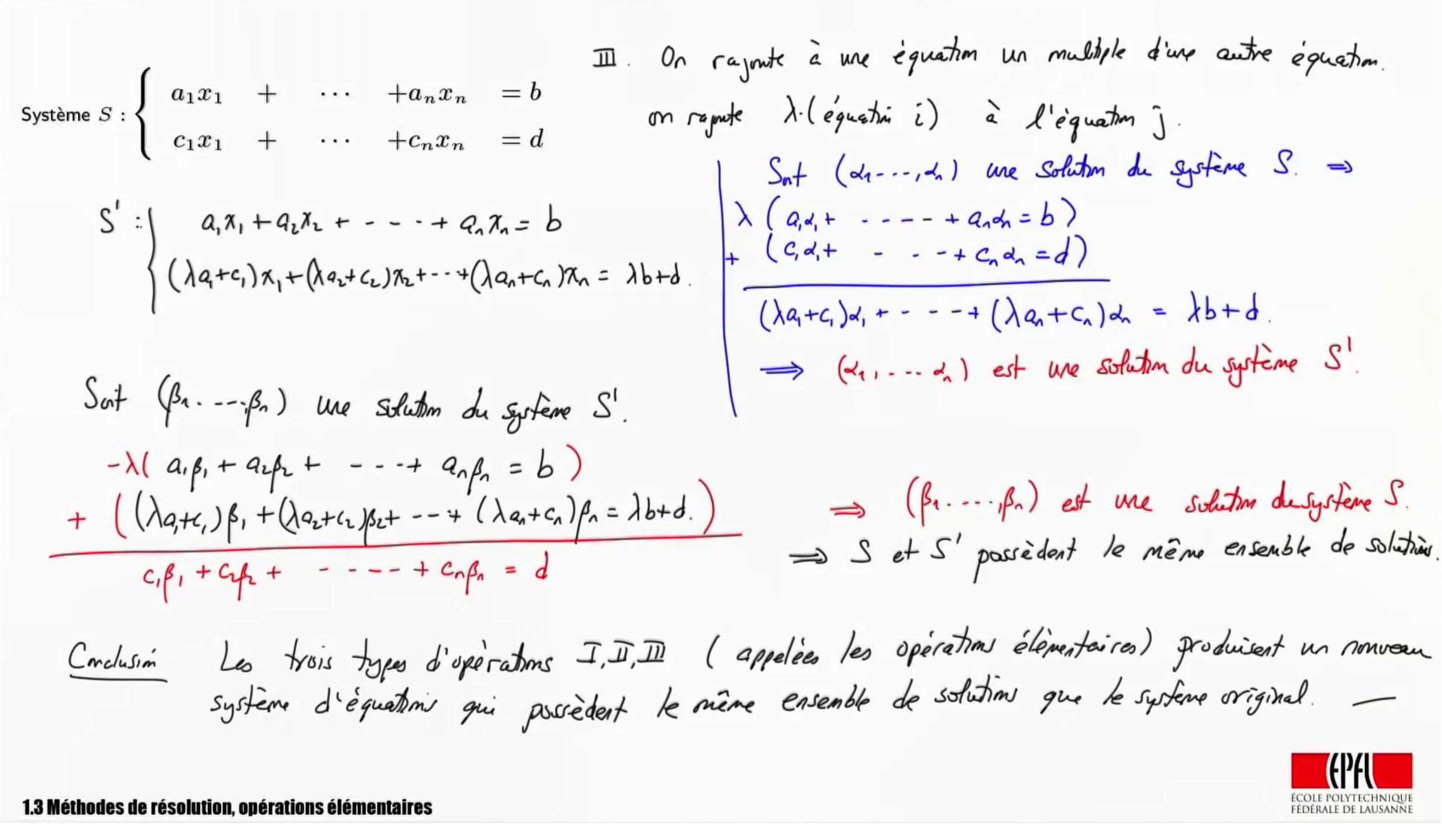


Très bien, maintenant je vais commencer avec une solution du système *S'* et je dois vous convaincre que c'est aussi une solution du système *S*. Soit $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ une solution du système *S'*. Ça veut dire précisément que si je substitue dans les deux équations j'ai les égalités vérifiées donc on a : $a_1\beta_1+a_2\beta_2+\ldots\ a_n\beta_n = b$, et $(\lambda a_1+c_1)\beta_1+\ldots$, $(\lambda a_2+c_2)\beta_2+\ldots+(\lambda a_n+c_n)\beta_n=\ldots\ \lambda b + d$. Et maintenant, je dois revenir au système *S*. Bon la première égalité, c'est exactement celle que je veux pour la première équation et maintenant je dois retrouver la deuxième et puis je dois un peu faire la même chose que j'ai fait là, mais je dois défaire ce que j'ai fait. Donc je vais multiplier cette première égalité ici par $-\lambda$, et ensuite je vais additionner ça à la deuxième égalité, et j'obtiens l'égalité suivante : donc j'ai $-\lambda a_1$ et là, j'ai $+\lambda a_1$, ça tombe. Donc il me reste $c_1\beta_1$. Deuxième terme j'ai $-\lambda a_2\ldots +\lambda a_2$, donc ce qui reste c'est : $+c_2\beta_2$ et à la fin j'ai $-\lambda a_n$ et là j'ai $+\lambda a_n$, ça tombe donc j'ai $+c_n\beta_n=\ldots$, et ici de l'autre côté de l'égalité, j'ai $-\lambda b+\lambda b$, ça tombe, donc c'est égal à d.

Notes

Summary

9m 19s



Donc du coup, le $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ satisfait aussi à la deuxième équation du système S, donc $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ est une solution du système S. Donc ici aussi avec le troisième type d'opération, les deux systèmes S et S' possèdent le même ensemble de solutions. La conclusion qui est très importante c'est que les opérations de type I, II et III que nous avons vues et que nous allons appeler les opérations élémentaires, produisent un nouveau système d'équations dont l'ensemble des solutions est le même que l'ensemble des solutions du le système original. Très bien.

Notes

Summary

11m 23s