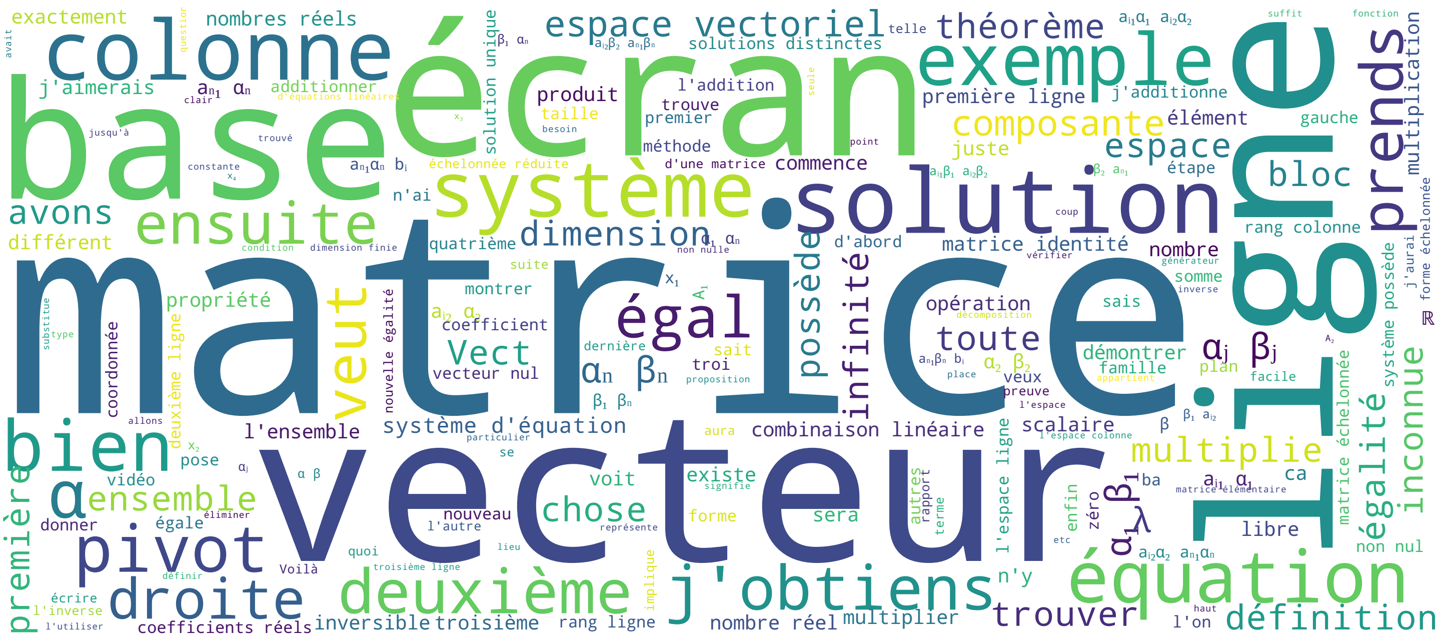
Chapitre 1 : Systèmes d'équations linéaires et matrices

1.2 Nombre de solutions d'un système linéaire

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

1.2 NOMBRE DE SOLUTIONS D'UN SYSTEME LINEAIRE Dans la vidéo précédente, nous avons vu, la définition d'un système d'équations linéaires, à *n* inconnues, à coefficient réel. Et nous avons vu, dans les exemples, au moins, que ce qui semblait être correct, c'était qu'un système d'équations comme ça, possède ou bien une solution unique, comme deux droites qui se coupent une fois ou bien qu'il n'y a pas de solution, comme deux droites qui sont parallèles, ou bien comme dans le cas de plans, deux plans qui se coupent en une droite, il y a une infinité de solutions. J'aimerais vous démontrer ce théorème dans cette vidéo.

Notes

Summary

0m 00s

Théorème Un système d'équations linéaires à n inconnues à coefficients réels satisfait à précisément une des conditions suivantes:

(1) le système ne possède aucune solution,

(2) le système possède une solution unique,

(3) " " " une infinité de solutions.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & + & \cdots & +a_{in}x_n & = b_i \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Preuve Il suffit de voir : si le système possède deux solutions distinctes, il en possède une infinité. Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ deux solutions distinctes du système.

On considère l'équation $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$

Donc le théorème, que nous allons démontrer : en considérant un système d'équations linéaires, aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$, à coefficients réels. Théorème : Un système d'équation linéaire à n inconnues, à coefficient réel, satisfait précisément une des conditions suivantes : Le système ne possède aucune solution, le système possède une solution unique, ou bien le système possède une infinité de solutions. Je vais démontrer ce théorème. Ce qu'il faut remarquer, c'est que pour démontrer ce théorème, il suffit de voir que si le système possède deux solutions distinctes, alors il en possède une infinité. Ok, alors je prends deux solutions distinctes du système. Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, deux solutions distinctes du système. Cela signifie qu'en substituant α_i à la place de x_i, dans toutes les équations du système, les égalités sont vérifiées. Et la même chose est vraie pour β_i. Je vais me concentrer sur une des équations. Donc on considère, l'équation $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots$

Notes

Summary

0m 38s

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

On a $\quad a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$

$$-\left(a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = b_i \right)$$

$$\overline{a_{i1}(\alpha_1 - \beta_1) + \cdots + a_{in}(\alpha_n - \beta_n) = 0}$$

1.2 Nombre de solutions d'un système linéaire

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

+ $a_{n_1}x_n = b_i$ Et j'ai mes deux solutions. Donc je vais écrire les égalités que j'ai en sachant que : $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ et $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ sont des solutions. Donc on a : $a_{i_1}\alpha_1 + a_{i_2}\alpha_2 +\ldots + a_{n_1}\alpha_n = b_i$ $a_{i_1}\alpha_1 + a_{i_2}\alpha_2 +\ldots + a_{n_1}\alpha_n = b_i$ $a_{i_1}\alpha_1 + a_{i_2}\alpha_2 +\ldots + a_{n_1}\alpha_n = b_i$ $a_{i_1}\alpha_1 + a_{i_2}\alpha_2 +\ldots + a_{n_1}\alpha_n = b_i$ Et puis la même chose est vraie si je substitue β au lieu de α, nous avons : $a_{i_1}\beta_1 + a_{i_2}\beta_2 +\ldots + a_{n_1}\beta_n = b_i$ $a_{i_1}\beta_1 + a_{i_2}\beta_2 +\ldots + a_{n_1}\beta_n = b_i$ $a_{i_1}\beta_1 + a_{i_2}\beta_2 +\ldots + a_{n_1}\beta_n = b_i$ Comme j'ai ces deux égalités, je peux soustraire l'une de l'autre. C'est-à-dire je vais soustraire les côtés gauches et les côtés droits. et j'obtiens une nouvelle égalité. Donc, j'obtiens $a_{i_1}(\alpha_1 - \beta_1) + a_{i_2}(\alpha_2 - \beta_2) +\ldots + a_{n_1}(\alpha_n - \beta_n) = b_i - b_i = 0$. $a_{i_1}(\alpha_1 - \beta_1) + a_{i_2}(\alpha_2 - \beta_2) +\ldots + a_{n_1}(\alpha_n - \beta_n) = b_i - b_i = 0$. Donc en particulier, ça veut dire que si je multiplie par c, pour tout nombre réel c, le côté gauche et le côté droit, j'obtiens une nouvelle égalité, $c\cdot(a_{i_1}(\alpha_1 - \beta_1) + a_{i_2}(\alpha_2 - \beta_2) +\ldots + a_{n_1}(\alpha_n - \beta_n)) = 0$. Donc j'ai soustrait les deux équations et puis j'obtiens cette nouvelle égalité.

Notes

Summary

3m 10s

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

On a $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$

$-\left(a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = b_i \right)$

$a_{i1}(\alpha_1-\beta_1) + \cdots + a_{in}(\alpha_n-\beta_n) = 0$

Pour $c\in\mathbb{R}$, on a $ca_{i1}(\alpha_1-\beta_1)+\cdots+ca_{in}(\alpha_n-\beta_n)=0$.

Comme $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq(\beta_1,\dots,\beta_n)$, il existe $1\leq j\leq n$ avec $\alpha_j\neq\beta_j$.

$\Rightarrow \alpha_j-\beta_j\neq 0$. Pour $c,d\in\mathbb{R}$, $c\neq d$

on a $c(\alpha_j-\beta_j)\neq d(\alpha_j-\beta_j)$.

$\alpha_j+c(\alpha_j-\beta_j)\neq\alpha_j+d(\alpha_j-\beta_j)$.

Donc pour tout c dans $\mathbb{R}$, on a cette fois l'égalité : $c\cdot a_{i1}(\alpha_1 - \beta_1) + c\cdot a_{i2}(\alpha_2 - \beta_2) +\dots + c\cdot a_{n1}(\alpha_n - \beta_n)) = 0$. $c\cdot a_{i1}(\alpha_1 - \beta_1) + c\cdot a_{i2}(\alpha_2 - \beta_2) +\dots + c\cdot a_{n1}(\alpha_n - \beta_n)) = 0$. $c\cdot a_{i1}(\alpha_1 - \beta_1) + c\cdot a_{i2}(\alpha_2 - \beta_2) +\dots + c\cdot a_{n1}(\alpha_n - \beta_n)) = 0$. Maintenant, je n'ai pas encore utilisé le fait que $(\alpha_1,\dots, \alpha_n)$ et $(\beta_1,\dots, \beta_n)$ sont des solutions distinctes, donc maintenant je vais l'utiliser. Comme $(\alpha_1,\dots, \alpha_n)$ est différent de $(\beta_1,\dots, \beta_n)$, il existe un nombre j, entre 1 et n, avec : α_j différent de β_j. Donc ça veut dire que $\alpha_j - \beta_j \neq 0$. Donc ça veut dire que pour deux nombres réels c et d différents, on a que $c(\alpha_j - \beta_j) \neq d(\alpha_j - \beta_j)$. on a que $c(\alpha_j - \beta_j) \neq d(\alpha_j - \beta_j)$. Ce qui veut aussi dire que $\alpha_j + c(\alpha_j - \beta_j) \neq \alpha_j + d(\alpha_j - \beta_j)$. $\alpha_j + c(\alpha_j - \beta_j) \neq \alpha_j + d(\alpha_j - \beta_j)$. Maintenant tout ça c'est un petit raisonnement On voit ne pas encore exactement à quoi ça sert. On va maintenant l'utiliser. Donc, je vais reprendre deux des égalités que j'avais précédemment et vais les additionner.

Notes

Summary

4m 38s

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

On a $\ast \quad a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$

$$-\left(a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = b_i \right)$$

$$a_{i1}(\alpha_1-\beta_1) + \cdots + a_{in}(\alpha_n-\beta_n) = 0$$

Pour $c \in \mathbb{R}$, on a $\ast\ast \quad c a_{i1}(\alpha_1-\beta_1) + \cdots + c a_{in}(\alpha_n-\beta_n) = 0$.

$\ast + \ast\ast$

$$a_{i1}(\alpha_1 + c(\alpha_1-\beta_1)) + \cdots + a_{ij}(\alpha_j + c(\alpha_j-\beta_j)) + \cdots + a_{in}(\alpha_n + c(\alpha_n-\beta_n)) = b_i$$

Comme $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, il existe $1 \leq j \leq n$ avec $\alpha_j \neq \beta_j$.

$\Rightarrow \alpha_j - \beta_j \neq 0$. Pour $c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq d$ on a $c(\alpha_j-\beta_j) \neq d(\alpha_j-\beta_j)$.

$$\alpha_j + c(\alpha_j-\beta_j) \neq \alpha_j + d(\alpha_j-\beta_j).$$

$\Rightarrow (\alpha_1 + c(\alpha_1-\beta_1), \ldots, \alpha_n + c(\alpha_n-\beta_n))$ est une solution du système original.

Les deux que je vais additionner ce sont les égalités * et ** [voir écran] [voir écran] Donc je fais "* + **", donc ça veut dire que j'additionne les côtés gauches et les côtés droits. Et puis j'obtiens : [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] [voir écran] Donc, ça veut dire que la suite de nombres réels : $\alpha_1 + c(\alpha_1 - \beta_1),\ldots, \alpha_n + c(\alpha_n - \beta_n)$ $\alpha_1 + c(\alpha_1 - \beta_1),\ldots, \alpha_n + c(\alpha_n - \beta_n)$. satisfait l'équation originale. Cette équation-là [voir écran] Donc j'ai obtenu une nouvelle solution. Donc, $\alpha_1 + c(\alpha_1 - \beta_1),\ldots, \alpha_n + c(\alpha_n - \beta_n)$, est une solution. Bon, est une solution de quoi ? C'est une solution de l'équation $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = b_i$. Mais comme cette équation est satisfaite, c'est pareil pour les autres équations, (i.e. l'indice i ne joue aucun rôle), l'expression qu'on a trouvé est une solution du système. Et puis, par ce petit raisonnement là, on voit que si je substitue dans notre nouvelle solution des valeurs différentes pour c, donc avec c et d différents, alors j'obtiens des solutions distinctes.

Notes

Summary

6m 38s

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

On a $\;*\; a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$

$$-\left(a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = b_i\right)$$

$$a_{i1}(\alpha_1-\beta_1) + \cdots + a_{in}(\alpha_n-\beta_n) = 0$$

Pour $c \in \mathbb{R}$, on a $\;**\; c a_{i1}(\alpha_1-\beta_1) + \cdots + c a_{in}(\alpha_n-\beta_n) = 0$.

Comme $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \dots, \beta_n)$, il existe $1 \leq j \leq n$ avec $\alpha_j \neq \beta_j$.
$\Rightarrow \alpha_j - \beta_j \neq 0$. Pour $c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq d$
on a $c(\alpha_j-\beta_j) \neq d(\alpha_j-\beta_j)$.
$\alpha_j + c(\alpha_j-\beta_j) \neq \alpha_j + d(\alpha_j-\beta_j)$.

$* + **$

$$a_{i1}(\alpha_1 + c(\alpha_1-\beta_1)) + \cdots + a_{ij}(\alpha_j + c(\alpha_j-\beta_j)) + \cdots + a_{in}(\alpha_n + c(\alpha_n-\beta_n)) = b_i$$

$\Rightarrow (\alpha_1 + c(\alpha_1-\beta_1), \dots, \alpha_n + c(\alpha_n-\beta_n))$ est une solution du système original.

En prenant $c \in \mathbb{R}$, on obtient une infinité de solutions. ☒

1.2 Nombre de solutions d'un système linéaire

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Et comme je peux choisir n'importe quel nombre réel pour la constante *c*, j'obtiens une infinité de solutions. Donc, en prenant à chaque fois *c* dans ℝ, des valeurs différentes, on obtient une infinité de solutions. On a donc bien démontré le théorème.

Notes

Summary

8m 43s