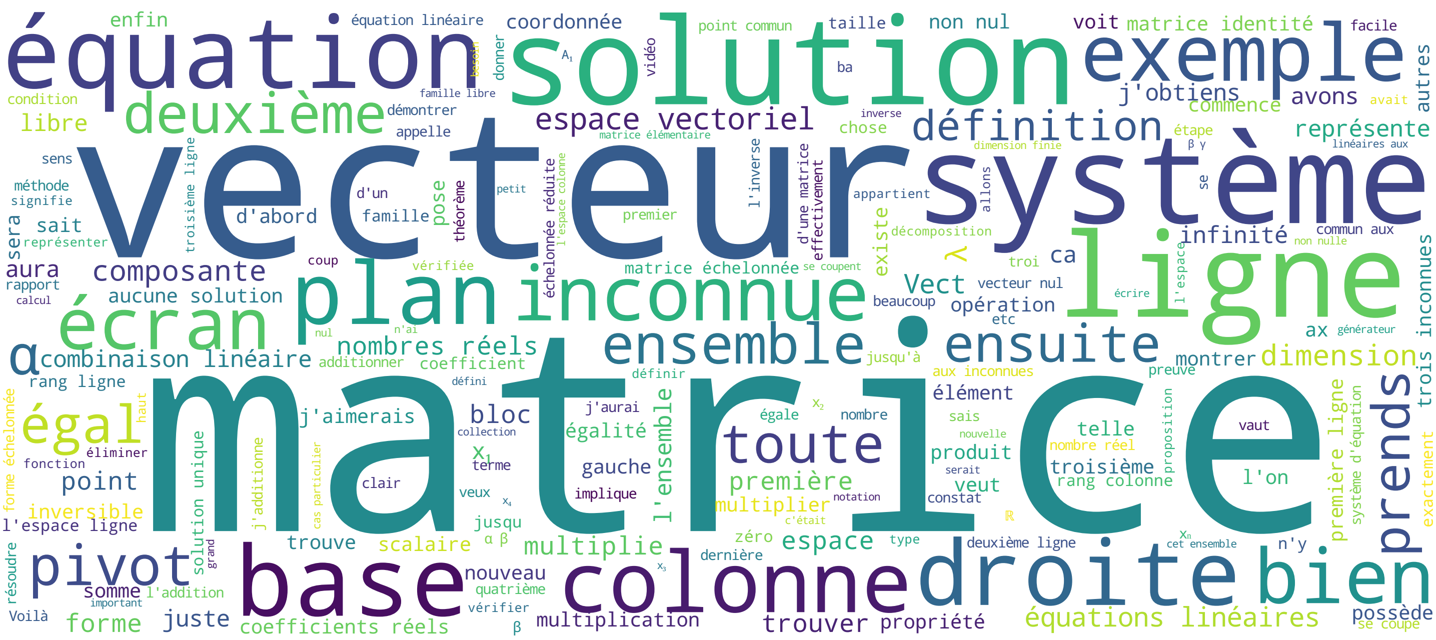
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 1 : Systèmes d'équations linéaires et matrices

1.1 Systèmes d'équations linéaires

Algèbre linéaire

Prof. Donna Testerman



Search MOOC

Video

EPFL

Chapitre 1 : Systèmes d'équations linéaires et matrices Bienvenue, au cours d'algèbre linéaire, nous commençons par le premier chapitre où l'on parle de systèmes d'équations linéaires et des matrices. Et je dois commencer par vous donner une définition de ce qu'est un système d'équations linéaires, et pour ça je donne d'abord une définition de ce que c'est une équation linéaire.

Notes

Summary

0m 00s

Déf'n . Une équation linéaire aux inconnues $x_1,\dots,x_n$ à coefficients réels est une équation de la forme $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$, $a_i, b \in \mathbb{R}$.

- Une famille de telles équations est un système d'équations linéaires aux inconnues $x_1,\dots,x_n$.

- Une solution d'un système d'équations linéaires aux inconnues $x_1,\dots,x_n$ est une suite ordonnée de n nombres réels $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ telle que en posant $x_i=\alpha_i$, pour tout i, toutes les équations du système sont vérifiées.

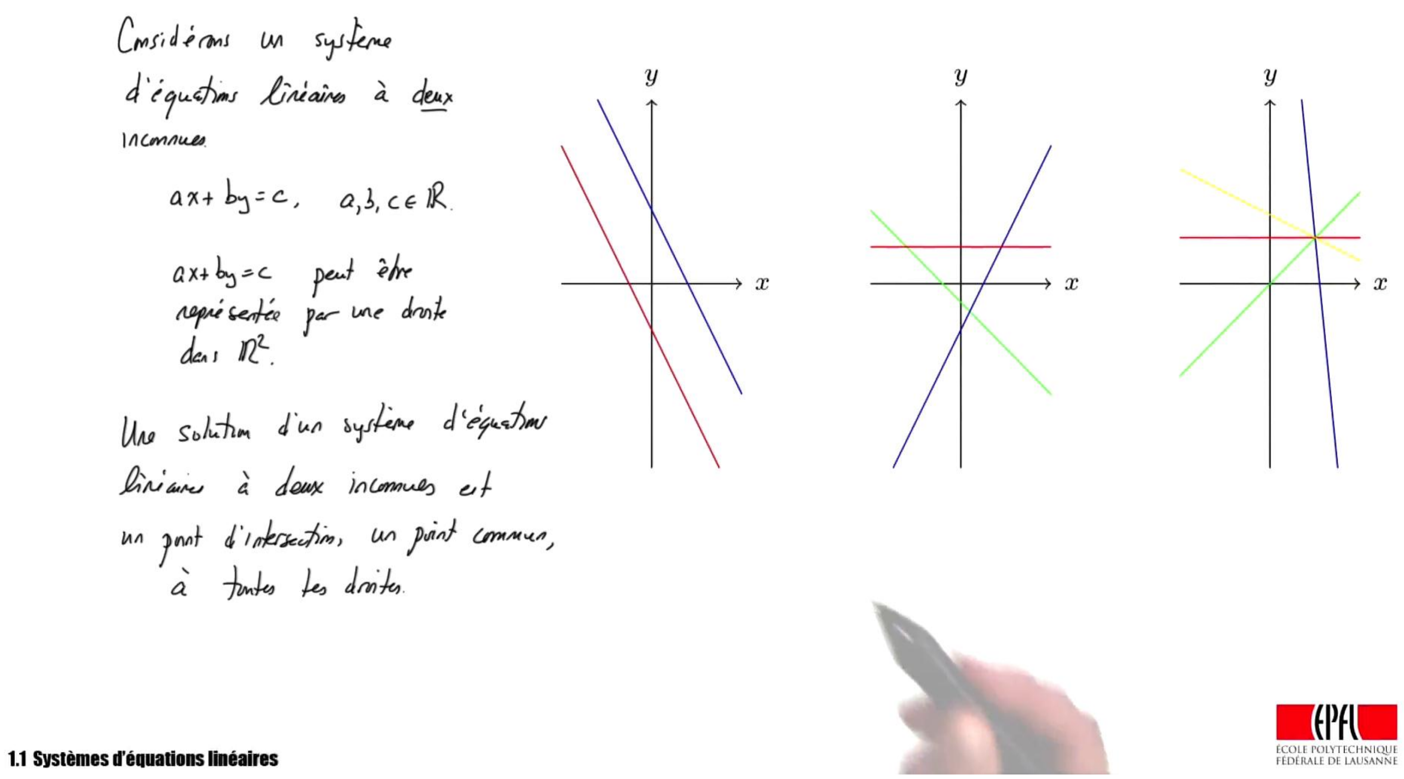
$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \end{array}$$

Définition : une équation linéaire aux inconnues x_1 jusqu'à x_n, à coefficients réels, est une équation de la forme : $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$, où les a_i et le b sont des nombres réels. Donc ça, c'est une première partie de la définition, deuxième partie : une famille de telles équations s'appelle un système d'équations linéaires aux inconnues x_1 jusqu'à x_n. Et puis enfin, si on a un système d'équations, on parlera d'une solution d'un système d'équations linéaires aux inconnues de x_1 jusqu'à x_n, qui est une suite ordonnée de n nombres réels α_1 jusqu'à α_n, telle que, en posant $x_i=\alpha_i$, pour tout i, toutes les égalités du système sont satisfaites. Toutes les équations du système sont vérifiées. Il faut donc imaginer que l'on a plusieurs équations, donc notre système est de la forme : $a_{1,1}x_1+\dots+a_{1,n}x_n=b_1$, on a une deuxième équation $a_{2,1}x_1+\dots+a_{2,n}x_n=b_2$, etc. Et puis on pose $x_i=\alpha_i$ dans chacune des équations, et l'égalité est vérifiée, ça c'est une solution. Maintenant il y a plusieurs questions naturelles qui se posent lorsque l'on a un système d'équations. On peut se demander combien de solutions sont possibles, comment résoudre le système, et est-ce qu'on ne trouve parfois pas de solution ? Est-ce qu'on trouve toujours une solution ? Comment on les trouve ?

Notes

Summary

0m 25s

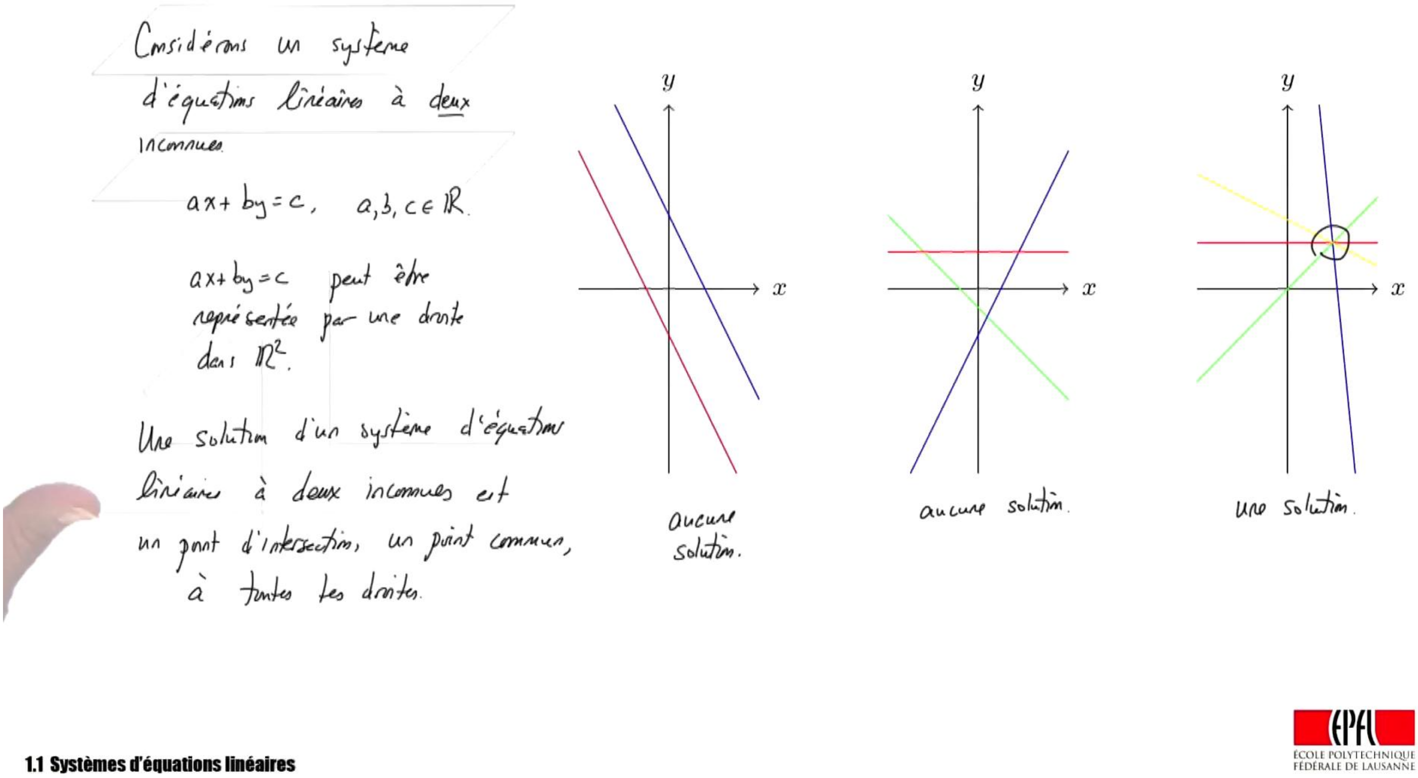


Donc maintenant, nous allons considérer un cas particulier, le cas des équations à deux inconnues. Donc on a des équations linéaires à deux inconnues. Maintenant une équation linéaire à deux inconnues est de la forme : $ax+by=c$, je nomme cette fois les inconnues x et y, où a, b et c sont des nombres réels. Maintenant on sait qu'une telle équation peut être représentée géométriquement dans un plan, et ça représente une droite dans le plan, donc : $ax+by=c$, peut être représentée par une droite dans le plan R^2. Donc si on a un système d'équations linéaires à deux inconnues, à coefficients réels, on peut représenter le système par une collection de droites dans le plan, et après, une solution d'un tel système d'équations linéaires à deux inconnues est un point d'intersection commun de toutes les droites. Maintenant ayant dit ça, il est assez facile de voir qu'il y a différentes possibilités pour l'ensemble des solutions. Ici on a deux droites parallèles donc il n'y a aucun point en commun à ces deux droites, donc ici, il n'y a aucune solution du système correspondant.

Notes

Summary

3m 07s

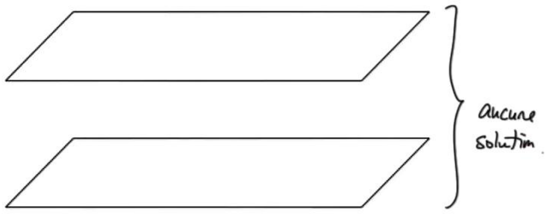


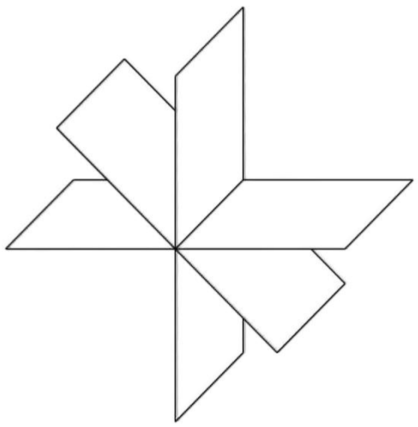
Ici on a trois droites différentes, il y a un point commun aux droites bleue et verte et un autre point commun aux droites rouges et bleues. Il n'y a aucun point qui soit commun aux trois, donc ici aussi il n'y a aucune solution. Pour une raison différente. Et ici, on pose quatre droites, donc ça serait un système de quatre équations à deux inconnues et puis il y a effectivement là un point commun aux quatre droites. Donc ici, il y a une solution. Il y a seulement un point, une solution.

Notes

Summary

5m 04s





Une équation linéaire à 3 inconnues est de la forme
$ax+by+cz=d$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

On peut représenter cette équation par un plan dans $\mathbb{R}^3$.

Une solution d'un système d'équations linéaires à 3 inconnues est un point commun à tous les plans du système

Considérons maintenant un autre cas que l'on peut interpréter géométriquement. Ce sont les équations à trois inconnues. Une équation linéaire à trois inconnues est une équation de la forme : *ax+by+cz=d*, où *a*, *b*, *c* et *d* sont des nombres réels. Et je pense que vous avez appris qu'une telle équation peut être représentée géométriquement comme l'ensemble des points *x*, *y*, *z* dans *R 3*, qui sont sur un plan; Donc ici, on peut représenter cette équation par un plan dans *R 3*. Donc de nouveau, si on a une collection, famille d'équations à trois inconnues, ça représente une collection de plans dans *R 3*, et puis avoir une solution du système serait équivalent à trouver un point qui serait en commun à tous les plans que l'on voit. Donc une solution d'un système d'équations linéaires à trois inconnues est un point commun à tous les plans du système. Ici nous aurons un cas de figure que nous n'avons pas vu avec les droites. Ici on a deux plans parallèles qui ne se touchent donc pas, ce qui représente un système qui n'a aucune solution. Mais ici on a un joli dessin, on a plusieurs plans qui forment une étoile, et puis il y a toute une droite là, commune à tous les plans.

Notes

Summary

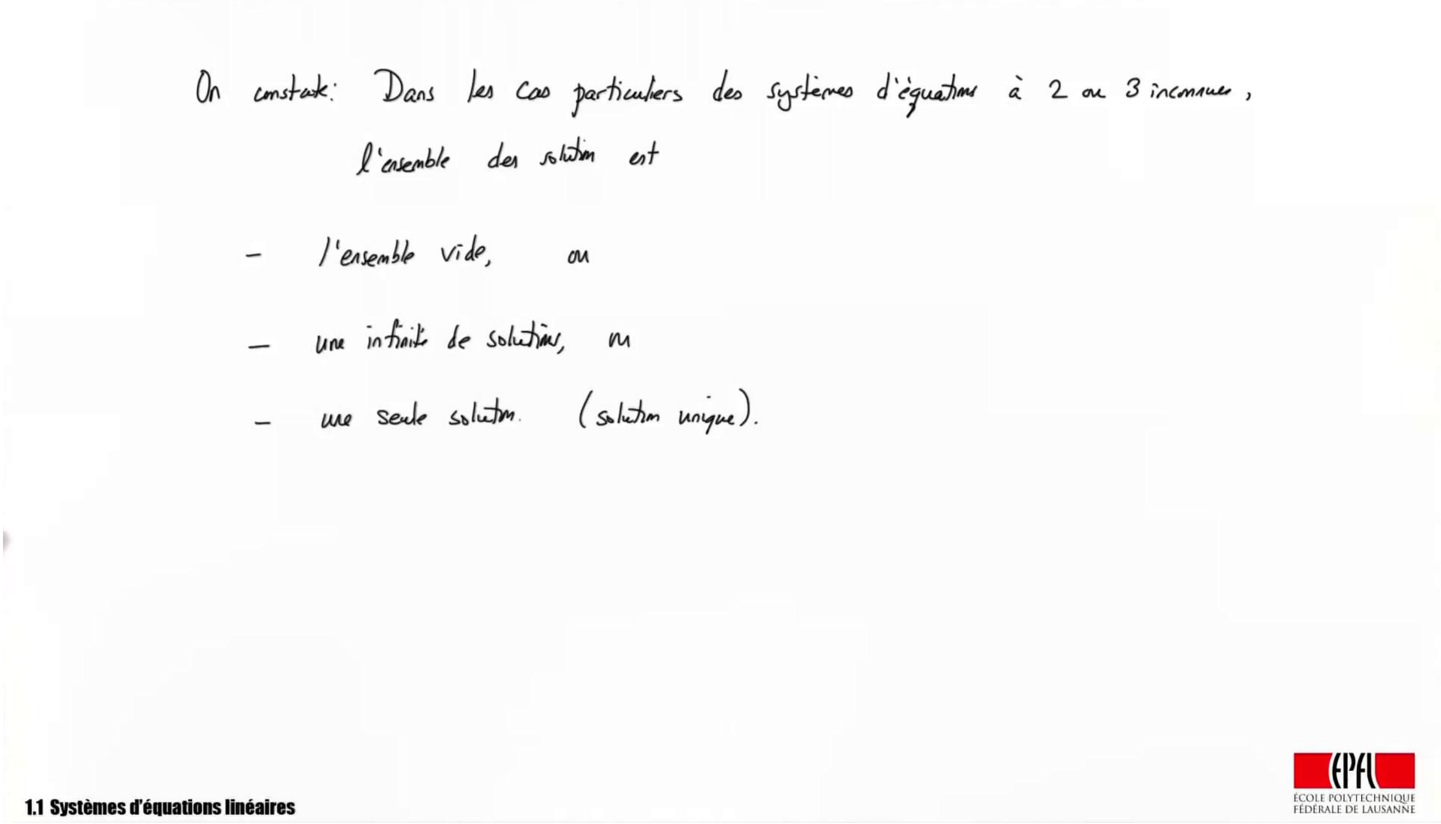
5m 43s

Donc là, il y a un nombre infini de solutions. Maintenant ça aurait aussi pu arriver avec les droites, dans le sens où je vous donne une équation de droite et une deuxième qui représente la même droite, et puis les droites sont superposées et là aussi, on aura une infinité de solutions. Mais c'est moins joli, ici on voit vraiment joliment que l'on peut avoir beaucoup de plans qui se coupent en une droite et puis on aura une infinité de points communs à ces plans. Après, il est clair qu'il y aura aussi la possibilité d'avoir une solution unique, si on coupe ici maintenant à travers cette droite-là par un autre plan, on n'aura qu'un point d'intersection. Donc avec ces deux façons géométriques de voir le système d'équations on peut faire un constat.

Notes

Summary

7m 49s



On constate donc la chose suivante : dans les deux cas particuliers des équations à deux inconnues et à trois inconnues, alors l'ensemble des solutions est l'une des trois choses suivantes : soit l'ensemble vide (aucune solution), soit une infinité de solutions ou seulement une solution unique. Donc l'ensemble des solutions est ou bien l'ensemble vide, ou infini, ou une seule solution. Nous n'avons pas démontré ça, c'est juste un constat. On a vu dans l'exemple des droites et des plans qui se coupent, que ça se coupe soit en un point unique, ou bien ça ne se coupe pas, ou bien ça se coupe, mais pas tous les plans et toutes les droites, ou bien il y avait toute une droite de coupure et ça c'est une infinité de solutions. On va voir dans les prochaines vidéos, qu'on peut démontrer ça ça n'est pas qu'un constat, que ce sont les trois seules possibilités. Maintenant, pour bien débuter le cours, je crois qu'il vaut la peine de faire quelques révisions de la géométrie d'un plan et aussi la géométrie dans *R 3* au niveau des équations des droites et des plans, et ça, vous aurez l'occasion de le faire dans les exercices.

Notes

Summary

8m 43s